

Variables aléatoires – Loi des grands nombres

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires

Calculer l'espérance et la variance d'une combinaison linéaire

Calculer les paramètres de la moyenne empirique

Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Appliquer l'inégalité de concentration

1. Opérations sur les variables aléatoires

Dans toute cette partie, on se place dans un univers fini Ω et on considère deux variables aléatoires X et Y définies sur cet univers.

Définition (Somme de variables aléatoires)

Si la variable aléatoire X prend les valeurs x_i (avec $1 \leq i \leq n$) et si la variable aléatoire Y prend les valeurs y_j (avec $1 \leq j \leq m$), la variable aléatoire $X + Y$ est la valeur aléatoire :

- qui prend toutes les valeurs possibles de $x_i + y_j$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$
- telle que la probabilité $p(X + Y = s)$ est la somme des probabilités de tous les événements $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ pour lesquels $x_i + y_j = s$.

Exemple

On lance deux pièces de monnaie parfaitement équilibrées et on considère les variables aléatoires :

- X qui prend la valeur 0 si la première pièce tombe sur « Pile » et la valeur 1 si la pièce tombe sur « Face »

- Y qui prend la valeur 1 si la deuxième pièce tombe sur « Pile » et la valeur 2 si la pièce tombe sur « Face »

La variable aléatoire $X + Y$ peut alors prendre les valeurs $0 + 1 = 1$, $0 + 2 = 1 + 1 = 2$ et $1 + 2 = 3$.

Les probabilités sont :

$$\begin{aligned} p(X + Y = 1) &= p((X = 0) \cap (Y = 1)) \\ &= \frac{1}{4} \text{ si les lancers sont indépendants.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(X + Y = 2) &= p((X = 0) \cap (Y = 2)) + p((X = 1) \cap (Y = 1)) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ si les lancers sont indépendants.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(X + Y = 3) &= p((X = 1) \cap (Y = 2)) \\ &= \frac{1}{4} \text{ si les lancers sont indépendants.} \end{aligned}$$



Définition (Produit par un réel)

Soit a et b deux nombres réels et X la variable aléatoire qui prend les valeurs x_i (pour $1 \leq i \leq n$).

La variable aléatoire $Z = aX + b$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs $z_i = ax_i + b$ avec les probabilités $p(Z = z_i) = p(X = x_i)$



Exemple

On lance un dé à 6 faces non truqué. On note X la variable aléatoire qui donne le résultat du dé. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La variable aléatoire $Z = 2X + 1$ fait correspondre à chaque lancer le double du résultat du dé augmenté de 1 ; sa loi est la suivante :

z_i	3	5	7	9	11	13
$p(Z=z_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition (Variables aléatoires indépendantes)

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_i (avec $1 \leq i \leq n$) et Y une variable aléatoire prenant les valeurs y_j (avec $1 \leq j \leq m$).

On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout i ($1 \leq i \leq n$) et tout j ($1 \leq j \leq m$), les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

Remarque

D'après la définition de l'indépendance vue en Première, cela signifie que pour tout i ($1 \leq i \leq n$) et tout j ($1 \leq j \leq m$) :

$$p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω et a et b deux nombres réels, alors :

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$

Exemple

- Si l'on reprend le premier exemple (lancer de deux pièces), la loi de X est :

x_i	0	1
$p(X=x_i)$	0,5	0,5

La loi de Y est :

y_i	1	2
$p(Y=y_i)$	0,5	0,5

Et la loi de $Z = X + Y$ est :

z_i	1	2	3
$p(Z=z_i)$	0,25	0,5	0,25

On a alors :

$$E(X) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 0,5$$

$$E(Y) = 1 \times 0,5 + 2 \times 0,5 = 1,5$$

et :

$$E(X + Y) = 1 \times 0,25 + 2 \times 0,5 + 3 \times 0,25 = 2$$

Par conséquent $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

- Si l'on reprend le second exemple (lancer d'un dé), on a :

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$$

et :

$$E(2X + 1) = 3 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{6} + 11 \times \frac{1}{6} + 13 \times \frac{1}{6} = 8$$

Donc $E(2X + 1) = 2E(X) + 1$.

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur Ω , alors :

- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Soient X une variable aléatoire définie sur Ω et a et b deux nombres réels, alors :

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Remarque

Comme l'écart-type σ est égal à la racine carrée de la variance on a (si X et Y sont **indépendantes**) :

- $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$

- $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$

2. Concentration - Loi des grands nombres

Définition

Un **échantillon** d'une loi de probabilité est une liste de variables aléatoires identiques et indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ qui suivent toutes cette loi.

Exemple

On réalise l'expérience qui consiste à tirer, au hasard, une boule d'un sac contenant cinq boules numérotées de 1 à 5 et on considère la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si on effectue n fois cette expérience (avec remise) et si l'on suppose les tirages indépendants, on crée un échantillon de n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5\}$.



Définition (Moyenne d'un échantillon)

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ est un échantillon d'une loi de probabilité, la **moyenne** (ou **moyenne empirique**) de cet échantillon est la variable aléatoire définie par :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$



Exemple

Par exemple on lance 60 fois un dé . On obtient 11 fois la face « 6 ».

Le nombre moyen de « 6 » obtenus à chaque lancer est $\frac{11}{60}$ (moyenne empirique) alors que

l'espérance d'obtenir un « 6 » à un lancer est $\frac{1}{6}$.



Propriété

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ est un échantillon d'une loi de probabilité d'espérance μ , de variance V et d'écart-type σ , alors, l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de la moyenne M_n sont :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \mu \\ V(M_n) &= \frac{V}{n} \\ \sigma(M_n) &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$



Exemple

On reprend l'exemple du tirage d'une boule parmi cinq numérotées de 1 à 5.

Un calcul simple montre que, pour chaque tirage, l'espérance est $\mu = 3$, la variance $V = 2$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{2}$.

Si l'on effectue n tirages et que l'on désigne par M_n la moyenne des numéros tirés, M_n suit une loi de paramètres :

- $E(M_n) = 3$

- $V(M_n) = \frac{2}{n}$
- $\sigma(M_n) = \sqrt{\frac{2}{n}}$

Remarque

On remarque que, quand la taille n de l'échantillon augmente, l'espérance mathématique de la moyenne ne change pas tandis que sa variance et son écart-type diminuent. Cette observation sera détaillée par la suite.

Propriété (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ .

Pour tout nombre réel α strictement positif :

$$p(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

Remarque

- En posant $\alpha = k\sigma$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut aussi s'écrire

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

- On rappelle que $|X - \mu|$ représente la distance entre X et μ .

Intuitivement, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev signifie donc que la probabilité que X prenne des valeurs éloignées de son espérance est faible (notamment si son écart-type est faible).

Exemple

L'espérance de gain à un jeu est de 10 euros et l'écart-type de 1 euro.

On cherche à minorer la probabilité que le gain soit compris dans l'intervalle $]5 ; 15[$ en utilisant

l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X la variable aléatoire représentant le gain. Ce gain est compris dans l'intervalle $]5 ; 15[$ si et seulement si $|X - 10| < 5$.

Or cet événement $|X - 10| < 5$ est l'événement contraire de $|X - 10| \geq 5$ et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$p(|X - 10| \geq 5) \leq \frac{1^2}{5^2} = 0,04$$

Donc la probabilité que le gain soit compris dans l'intervalle $]5 ; 15[$ est supérieure à $1 - 0,04 = 0,96$.

Propriété (Inégalité de concentration)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon d'une loi de probabilité d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ .

On note M_n la moyenne empirique définie par $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

Pour tout réel strictement positif ε :

$$p(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Démonstration

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n en tenant compte du fait que $E(M_n) = \mu$ et $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Propriété (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon d'une loi de probabilité d'espérance mathématique μ et de moyenne empirique M_n .

Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

Remarque

Le résultat précédent signifie que la probabilité que la moyenne empirique s'éloigne de l'espérance mathématique devient très faible pour les grands échantillons.

Les questions essentielles

1. Comment déterminer la loi de probabilité d'une somme $X + Y$?

Il faut construire un tableau à double entrée listant toutes les sommes possibles, puis additionner les probabilités des couples qui donnent la même somme. Si les variables sont indépendantes, on multiplie les probabilités.

Voir la fiche méthode : [Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires](#)

2. Comment calculer l'espérance et la variance d'une combinaison linéaire $aX + b$?

On utilise les formules de linéarité : $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$. Pour une somme de variables indépendantes, on additionne les espérances et les variances.

Voir la fiche méthode : [Calculer l'espérance et la variance d'une combinaison linéaire](#)

3. Comment calculer les paramètres de la moyenne empirique M_n ?

L'espérance de M_n est la même que celle de la loi (μ), la variance est divisée par n et l'écart-type est divisé par $\sqrt{n}$.

Voir la fiche méthode : [Calculer les paramètres de la moyenne empirique](#)

4. Comment appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

On identifie μ et σ^2 , on exprime l'événement sous la forme $|X - \mu| \geq \alpha$, puis on applique la majoration $p(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$.

Voir la fiche méthode : [Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev](#)

5. Comment appliquer l'inégalité de concentration et déterminer une taille d'échantillon ?

On utilise $p(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ pour majorer la probabilité d'écart, ou on résout $n \geq \frac{\sigma^2}{\alpha\varepsilon^2}$ pour trouver le nombre minimal d'observations.

Voir la fiche méthode : [Appliquer l'inégalité de concentration](#)