

Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Reconnaître un schéma de Bernoulli

Représenter un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré

Calculer une probabilité avec la loi binomiale

Calculer des probabilités cumulées avec la loi binomiale

Calculer l'espérance et l'écart-type d'une loi binomiale

1. Loi de Bernoulli



Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p (avec $0 < p < 1$) une expérience aléatoire ayant deux issues :

- l'une appelée **succès** (généralement notée S) de probabilité p ,
- l'autre appelée **échec** (généralement notée $\bar{S}$) de probabilité $1 - p$.



Définition

On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Cette variable aléatoire suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** , définie par le tableau suivant :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Exemple

Au bonneteau, deux cartes noires et une carte rouge sont présentées, faces cachées, sur la table.

On suppose qu'un joueur choisit une carte complètement au hasard.

On a affaire à une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

La probabilité de succès est : $p(S) = p = \frac{1}{3}$ et la probabilité d'échec $p(\bar{S}) = 1 - p = \frac{2}{3}$

Propriété

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p est :

$$E(X) = p.$$

Démonstration

D'après la définition de l'espérance mathématique :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p.$$

Propriété

La variance d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p est :

$$V(X) = p(1 - p)$$

et son écart-type est :

$$\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$$

2. Schéma de Bernoulli - Loi binomiale



Définition

On appelle **schéma de Bernoulli** la répétition d'épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**.



Exemple

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire 3 boules au hasard.

- Si l'épreuve s'effectue sans remise, les tirages ne sont ni identiques, ni indépendants. En effet, le fait d'avoir retiré une boule lors du premier tirage fait que le second tirage n'est pas identique au premier.
- Si l'épreuve s'effectue avec remise, on pourra, par contre, considérer que les tirages sont identiques et indépendants. On a donc bien, dans ce cas, un schéma de Bernoulli.



Définition

Soit X la variable aléatoire qui **compte le nombre de succès** dans un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves ayant chacune une probabilité de succès égale à p .

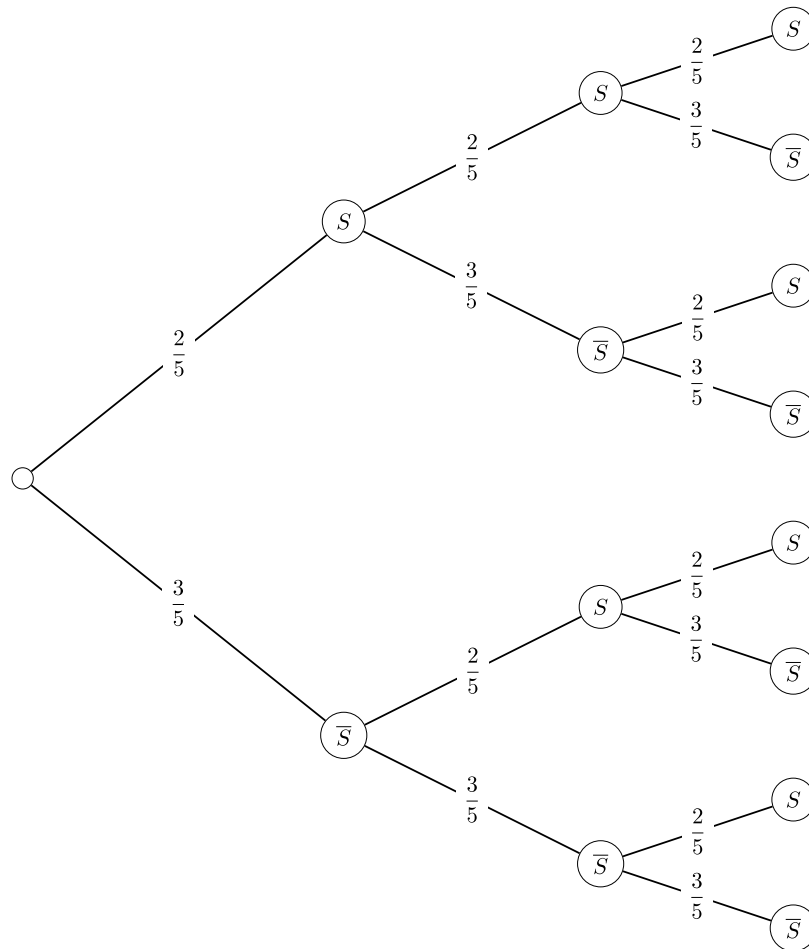
La variable aléatoire X suit une loi appelée **loi binomiale de paramètres n et p** , souvent notée $\mathcal{B}(n; p)$.



Exemple

On reprend l'exemple précédent : tirage au hasard et avec remise de 3 boules parmi 5 boules comportant 2 boules rouges et 3 boules blanches. On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules rouges obtenues. La variable X suit une loi binomiale de paramètres 3 (nombre d'épreuves) et $\frac{2}{5}$ (probabilité d'obtenir une boule rouge lors d'une épreuve).

Ce schéma peut être représenté par l'arbre suivant :



Grâce à l'arbre on voit que :

- la probabilité d'avoir 3 succès (c'est à dire 3 boules rouges) est $p(X = 3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$;
- il y a 3 chemins qui correspondent à 2 succès ($SS\bar{S}$, $S\bar{S}S$, $\bar{S}SS$). La probabilité d'obtenir 2 boules rouges est donc :

$$p(X = 2) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = 3 \times \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} \right] = \frac{36}{125} ;$$

- il y a également 3 chemins qui correspondent à un unique succès ($S\bar{S}\bar{S}$, $\bar{S}S\bar{S}$, $\bar{S}\bar{S}S$). La probabilité d'obtenir une unique boule rouge est donc :

$$p(X = 1) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 3 \times \left[\frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right] = \frac{54}{125} ;$$

- la probabilité de n'avoir aucune boule rouge est $p(X = 0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$.

La loi de X est donc donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

On vérifie bien que $\frac{27}{125} + \frac{54}{125} + \frac{36}{125} + \frac{8}{125} = 1$.



Propriété

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ est :

$$E(X) = np.$$



Exemple

Dans l'exemple précédent, la variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{2}{5}\right)$.

Son espérance mathématique est donc $E(X) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$.

On vérifie que l'on obtient bien le même résultat en utilisant le tableau de la loi de X et la définition de l'espérance mathématique :

$$E(X) = 0 \times \frac{27}{125} + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125} = \frac{150}{125} = 1,2.$$

Propriété

La variance d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ est :

$$V(X) = np(1 - p)$$

et son écart-type est :

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, la variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{2}{5}\right)$.

Sa variance est donc $V(X) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{25} = 0,72$.

Son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{0,72} \approx 0,85$.

Propriété

On considère un arbre pondéré représentant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Le nombre de chemins qui correspondent à k succès est égal au nombre de combinaisons de k éléments parmi n : $\binom{n}{k}$ (voir [Dénombrement](#) - Combinaisons).

Exemple

On reprend le même exemple que précédemment. On a vu, par exemple, qu'il y avait 3 chemins correspondant à 2 succès ce qui correspond bien à $\binom{3}{2} = 3$.

Théorème

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n; p)$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Exemple

On lance 8 fois une pièce équilibrée et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on obtient *Pile*.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir **4 fois** *Pile* (par exemple) est :

$$p(X = 4) = \binom{8}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

$$\binom{8}{4} = 70 \quad (\text{à la calculatrice}).$$

Donc :

$$p(X = 4) = 70 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}.$$

Les questions essentielles

1. Comment reconnaître un schéma de Bernoulli ?

Il faut vérifier trois conditions : chaque épreuve n'a que deux issues (succès ou échec), les épreuves sont identiques (même probabilité p) et indépendantes. Un tirage avec remise vérifie ces conditions, un tirage sans remise ne les vérifie pas.

Voir la fiche méthode : [Reconnaître un schéma de Bernoulli](#)

2. Comment construire un arbre pondéré pour un schéma de Bernoulli ?

À chaque nœud, tracer deux branches (succès avec probabilité p , échec avec probabilité $1 - p$) et répéter sur n niveaux. La probabilité d'un chemin se calcule en multipliant les probabilités le long des branches.

Voir la fiche méthode : [Représenter un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré](#)

3. Comment calculer $p(X = k)$ avec la loi binomiale ?

On applique la formule $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. Il faut d'abord identifier n , p et k , puis calculer le coefficient binomial (touche nCr à la calculatrice) et les puissances.

Voir la fiche méthode : [Calculer une probabilité avec la loi binomiale](#)

4. Comment calculer $p(X \leq k)$ ou $p(X \geq k)$?

Pour « au plus k succès », additionner $p(X = 0) + p(X = 1) + \dots + p(X = k)$.

Pour « au moins k succès », utiliser le complément : $p(X \geq k) = 1 - p(X \leq k - 1)$.

La calculatrice dispose de la fonction binomFRép (binomcdf).

Voir la fiche méthode : [Calculer des probabilités cumulées avec la loi binomiale](#)

5. Comment calculer l'espérance et l'écart-type d'une loi binomiale ?

Pour $X \sim \mathcal{B}(n; p)$: l'espérance est $E(X) = np$, la variance est $V(X) = np(1 - p)$ et l'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$. L'espérance donne le nombre moyen de succès, l'écart-type mesure la dispersion autour de cette moyenne.

Voir la fiche méthode : [Calculer l'espérance et l'écart-type d'une loi binomiale](#)