

# Fonction logarithme népérien

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

## 🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE

Simplifier une expression avec les propriétés de  $\ln$ Résoudre une équation avec  $\ln$ Résoudre une inéquation avec  $\ln$ Dériver une fonction contenant  $\ln$ Calculer une limite avec  $\ln$  et les croissances comparées

## 1. Définition de la fonction logarithme népérien



### Théorème et définition

Pour tout réel  $x > 0$ , l'équation  $e^y = x$ , d'inconnue  $y$ , admet une **unique** solution.

La fonction **logarithme népérien**, notée  $\ln$ , est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  qui à  $x > 0$ , associe le réel  $y$  solution de l'équation  $e^y = x$ .



### Remarque

Pour  $x \leq 0$ , par contre, l'équation  $e^y = x$  n'a **pas de solution**



### Propriété

- Pour tout réel  $x > 0$  et tout  $y \in \mathbb{R} : e^y = x \Leftrightarrow y = \ln(x)$
- Pour tout réel  $x > 0 : e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout réel  $x : \ln(e^x) = x$

### Remarque

- Ces propriétés se déduisent immédiatement de la définition
- On dit que les fonctions «logarithme népérien » et «exponentielle » sont *réciproques*
- On en déduit immédiatement :  $\ln(1) = 0$  et  $\ln(e) = 1$

## 2. Étude de la fonction logarithme népérien

### Théorème

La fonction logarithme népérien est **continue** et **dérivable** sur  $]0; +\infty[$  et sa dérivée est définie par :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

### Démonstration

On dérive l'égalité  $e^{\ln(x)} = x$  membre à membre.

D'après le théorème de **dérivation** des fonctions composées on obtient :

$$\ln'(x) \times e^{\ln(x)} = 1$$

C'est à dire :

$$\ln'(x) \times x = 1$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

### Propriété

La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur  $]0; +\infty[$ .

### Démonstration

Sa dérivée  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  est strictement positive sur  $]0; +\infty[$

### Propriété

Soit  $u$  une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle  $I$ .

Alors la fonction  $f : x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f' = \frac{u'}{u}$$

### Démonstration

On utilise le théorème de dérivation de fonctions composées .

### Exemple

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

### Limites

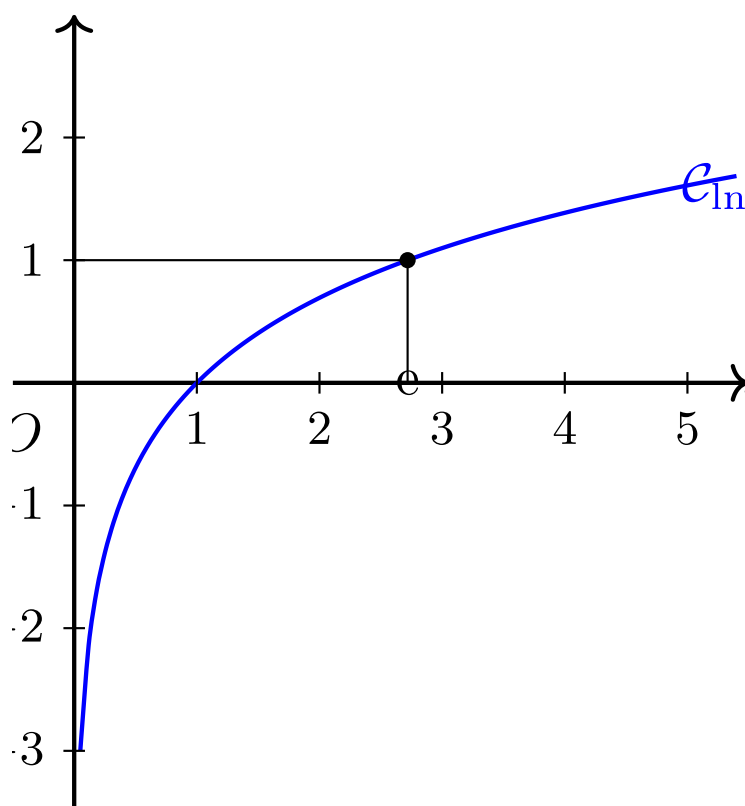
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

### Remarque

- Ces résultats permettent de tracer le tableau de variation et la courbe représentative de la fonction logarithme népérien :

| $x$                   | 0         | 1 | e | $+\infty$ |
|-----------------------|-----------|---|---|-----------|
| $f'(x) = \frac{1}{x}$ |           |   | + |           |
| $f(x) = \ln x$        | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |

Tableau de variation de la fonction logarithme népérien



Graphique de la fonction logarithme népérien



### Théorème (« Croissance comparée »)

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$



### Remarque

Comme dans le cas de la fonction exponentielle, on peut généraliser les deux premières formules :

Pour tout entier  $n \geq 1$ :

- $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$



### Théorème

Si  $a$  et  $b$  sont 2 réels strictement positifs :

- $\ln a = \ln b$  si et seulement si  $a = b$
- $\ln a < \ln b$  si et seulement si  $a < b$



### Remarque

- Le théorème précédent résulte de la stricte croissance de la fonction logarithme népérien.
- En particulier, comme  $\ln(1) = 0$  :  $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ . N'oubliez donc pas que  $\ln(x)$  **peut être négatif** (si  $0 < x < 1$ ) ; c'est une cause d'erreurs fréquente dans les exercices notamment avec des inéquations !

## Convexité

La fonction logarithme népérien est **concave** sur  $]0; +\infty[$ .

### Démonstration

La dérivée seconde de  $\ln$  est :

$$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Pour tout  $x > 0$ , on a  $x^2 > 0$  donc  $\ln''(x) < 0$  : la fonction  $\ln$  est bien concave sur  $]0; +\infty[$ .

### Remarque

Graphiquement, la courbe de la fonction  $\ln$  est située en dessous de chacune de ses tangentes.

## 3. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

### Théorème

Si  $a$  et  $b$  sont 2 réels strictement positifs et si  $n \in \mathbb{Z}$  :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

### Exemple

- $\ln(4) = \ln(2^2) = 2 \ln(2)$
- Pour  $x > 1$  :  $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$

Cette égalité peut être intéressante (pour calculer la dérivée par exemple) mais il faut que  $x > 1$ .

Si  $x < -1$ , l'expression  $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  est définie mais pas  $\ln(x+1) - \ln(x-1)$ .

## Les questions essentielles

### 1. Comment simplifier une expression contenant des logarithmes ?

On utilise les propriétés algébriques :  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ,  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$  et  $\ln(a^n) = n \ln a$ . On décompose l'expression en appliquant ces règles puis on regroupe les termes.

Voir la fiche méthode : [Simplifier une expression avec les propriétés de ln](#)

### 2. Comment résoudre une équation contenant ln ?

On détermine d'abord le domaine de validité (arguments strictement positifs), puis on se ramène à la forme  $\ln(A) = \ln(B)$  pour appliquer l'injectivité :  $A = B$ . Si l'équation est de la forme  $\ln(A) = k$ , on passe à la forme exponentielle  $A = e^k$ .

Voir la fiche méthode : [Résoudre une équation avec ln](#)

### 3. Comment résoudre une inéquation avec ln ?

On se ramène à  $\ln(A) \leq \ln(B)$  et on utilise la stricte croissance de  $\ln$  :  $A \leq B$ . L'étape essentielle est d'intersecter le résultat avec le domaine de validité.

Voir la fiche méthode : [Résoudre une inéquation avec ln](#)

#### 4. Comment dériver une fonction contenant $\ln$ ?

On utilise la formule  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  ou, pour une composée,  $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ . Il est souvent utile de simplifier d'abord l'expression avec les propriétés algébriques de  $\ln$  avant de dériver.

Voir la fiche méthode : [Dériver une fonction contenant  \$\ln\$](#)

#### 5. Comment calculer une limite avec $\ln$ (croissances comparées) ?

On utilise les résultats de croissances comparées :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = 0$ .

Face à une [forme indéterminée](#), on factorise pour faire apparaître l'une de ces formes de référence.

Voir la fiche méthode : [Calculer une limite avec  \$\ln\$  et les croissances comparées](#)