

Limites d'une fonction

DURÉE ESTIMÉE

30 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Calculer une limite à l'aide du nombre dérivé

Lever une forme indéterminée

Limites du type « $k/0$ »

Déterminer les asymptotes d'une courbe

Calculer la limite d'une fonction composée

Utiliser les théorèmes de comparaison

Utiliser les croissances comparées

1. Définitions

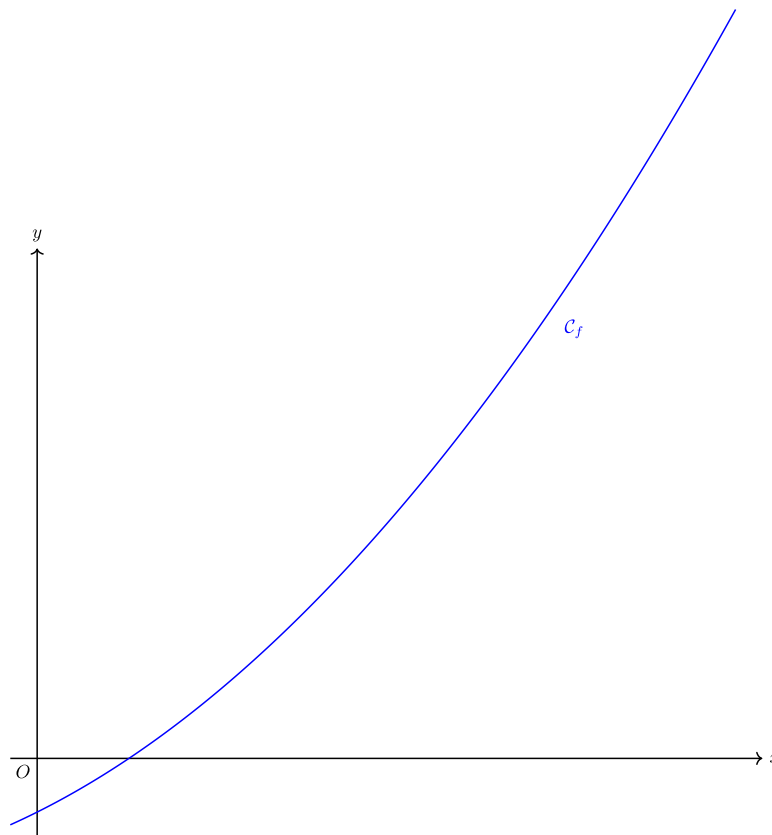


Définition

Limite infinie quand x tend vers l'infini.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour x suffisamment grand, $f(x)$ est aussi grand que l'on veut. On écrit alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque

On définit de façon similaire les limites :

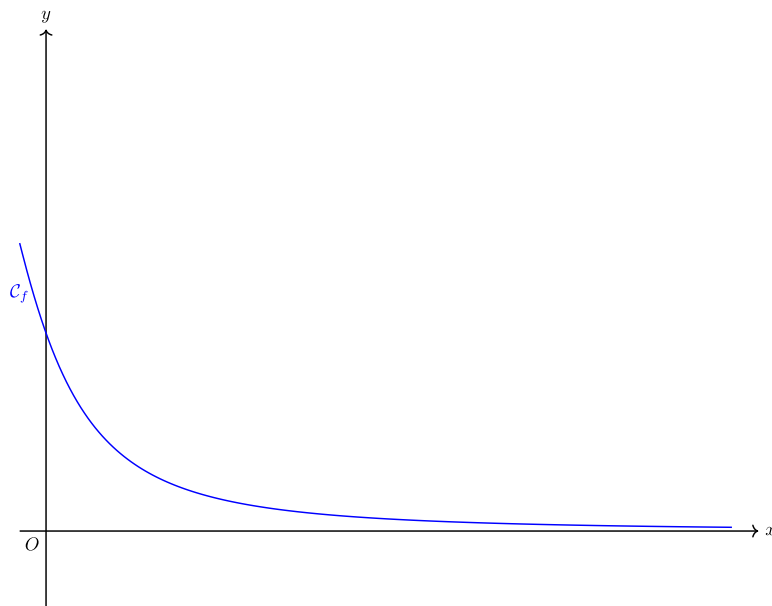
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Définition

Limite finie quand x tend vers l'infini.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$.

On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour x suffisamment grand, $f(x)$ est aussi proche de l que l'on veut. On écrit alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Remarque

On définit de façon similaire la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Définition

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f .

Exemple

Sur la courbe ci-dessus, la droite d'équation $y = 0$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f .

Définition

Limite infinie quand x tend vers un réel.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a; b[$ (avec $a < b$).

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x se rapproche de a en restant supérieur à a . On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty.$$

De même, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b par valeurs inférieures lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x se rapproche de b en restant inférieur à b . On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = +\infty.$$

Enfin, si $c \in]a; b[$, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers c si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers c par valeurs supérieures et par valeurs inférieures. On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty.$$

Remarque

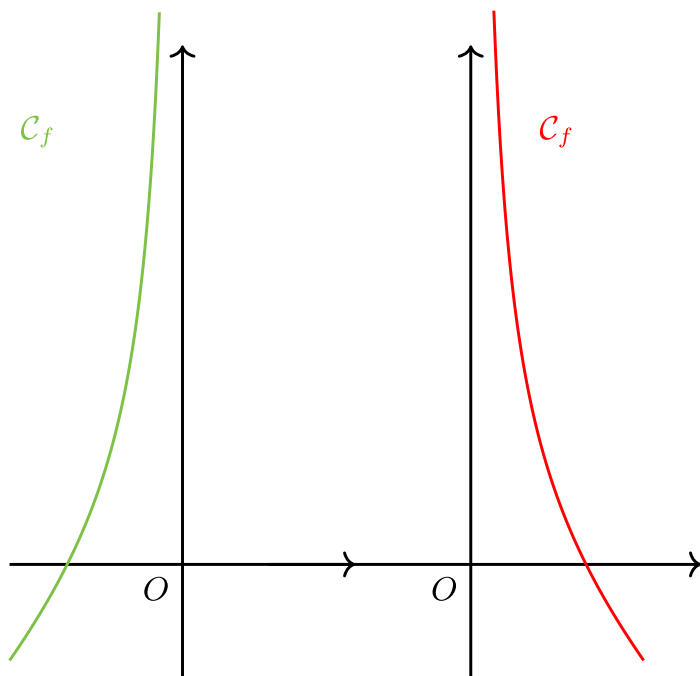
On définit de façon symétrique $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ en remplaçant « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut » par « $f(x)$ est aussi petit que l'on veut » dans la définition.

Définition

Si $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = c$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f .

💡 Exemple

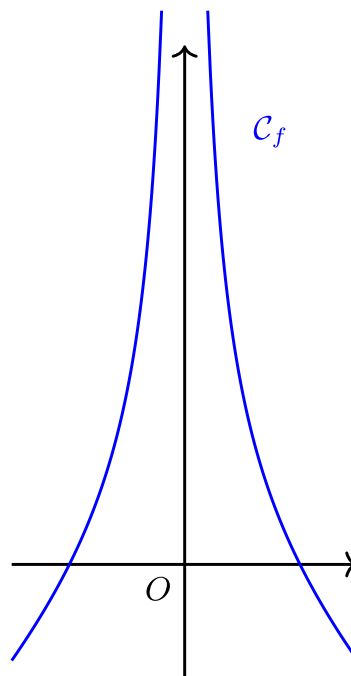
Sur les trois courbes de la figure ci-dessous, la droite d'équation $x = 0$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f .



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Définition

Limite finie quand x tend vers un réel.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a; b[$ (avec $a < b$).

On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a par valeurs supérieures lorsque $f(x)$ se rapproche de l quand x se rapproche de a en restant supérieur à a .

On écrit alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$.

De même, on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers b par valeurs inférieures lorsque $f(x)$ se rapproche de l quand x se rapproche de b en restant inférieur à b .

On écrit alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = l$.

Enfin, si $c \in]a; b[$, on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers c si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers c par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.

On écrit alors $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$.

2. Limites usuelles



Propriété

Pour tout entier $n > 1$:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

3. Opérations sur les limites



Propriété

Limite d'une somme.

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

F.I. signifie forme indéterminée.



Remarque

« Forme indéterminée » ne signifie **pas** que la limite n'existe pas mais que les formules d'opérations sur les limites ne permettent pas de trouver directement la limite. Pour la calculer, il faut alors « lever l'indétermination » par exemple en simplifiant une fraction (cf. *fiches méthodes*).

Propriété

Limite d'un produit.

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x)$
l	l'	$l \times l'$
$l \neq 0$	$\pm\infty$	$(\text{signe}) \infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$(\text{signe}) \infty$
0	$\pm\infty$	F.I.

- *F.I.* signifie forme indéterminée.
- $\pm\infty$ signifie que la formule s'applique pour $+\infty$ et pour $-\infty$.
- $(\text{signe}) \infty$ signifie que l'on utilise la règle des signes usuelle :

$$+ \times + = +$$

$$+ \times - = -$$

$$- \times - = +$$

pour déterminer si la limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

Propriété

Limite d'un quotient.

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
$l \neq 0$	0	$(\text{signe}) \infty$
0	0	F.I.
l	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	l	$(\text{signe}) \infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

Propriété

Limite d'une fonction composée.

a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

Remarque

On pose souvent $X = f(x)$ («changement de variable») et on écrit alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} X = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c.$$

Exemple

On cherche à calculer :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x^2}.$$

On pose $X = 1 + x^2$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} X = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x^2) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty.$$

4. Théorèmes de comparaison

Théorème

- Si $f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors :

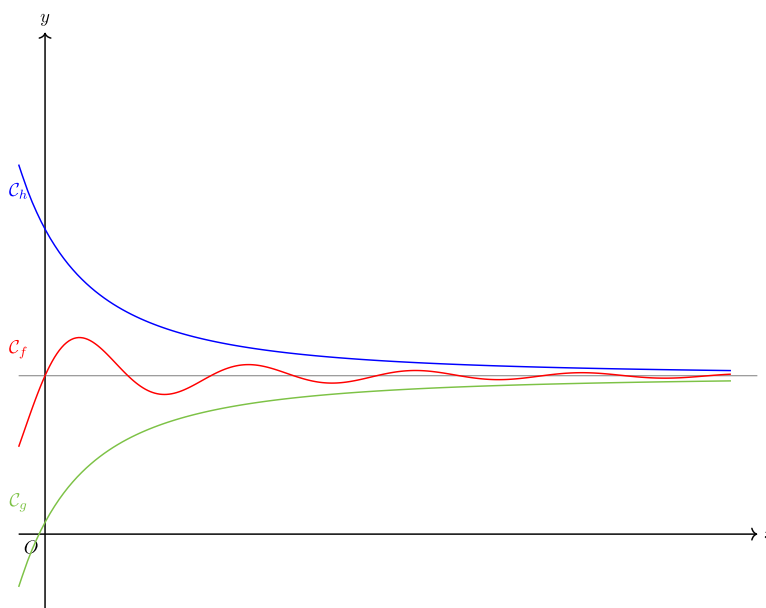
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Théorème

Théorème des « gendarmes ».

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$



Théorème des gendarmes

Remarque

On a des théorèmes similaires lorsque $x \rightarrow -\infty$.

5. Croissances comparées



Théorème

Croissances comparées de l'exponentielle.

Pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$



Remarque

En $+\infty$, l'exponentielle « l'emporte » sur toute puissance de x : on dit que l'exponentielle croît plus vite que tout polynôme.

En $-\infty$, e^x tend vers 0 plus vite que toute puissance de x ne tend vers l'infini.



Exemple

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$.

On pose $X = -x$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow -\infty$ et :

$$x^2 e^{-x} = X^2 e^X$$

Par croissance comparée : $\lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

Les questions essentielles

1. Comment lever une forme indéterminée ?

Selon le type d'indétermination, on utilise la factorisation par le terme de plus haut degré (pour « $\infty - \infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ »), la multiplication par l'expression conjuguée (pour les racines), ou le nombre dérivé (pour « $\frac{0}{0}$ »).

Voir la fiche méthode : Lever une forme indéterminée

2. Comment calculer une limite du type « $k/0$ » ?

On distingue les limites à gauche et à droite en étudiant le signe du dénominateur au voisinage de la valeur interdite. La limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$ selon ce signe.

Voir la fiche méthode : Limites du type « $k/0$ »

3. Comment déterminer les asymptotes d'une courbe ?

On calcule les limites en $\pm\infty$ pour les asymptotes horizontales ($y = l$), et les limites aux valeurs interdites pour les asymptotes verticales ($x = a$).

Voir la fiche méthode : Déterminer les asymptotes d'une courbe

4. Comment calculer la limite d'une fonction composée ?

On pose $X = f(x)$, on calcule la limite de X , puis on applique la fonction extérieure g à cette limite. C'est le théorème de composition des limites.

Voir la fiche méthode : [Calculer la limite d'une fonction composée](#)

5. Comment utiliser le théorème des gendarmes ?

On encadre $f(x)$ entre deux fonctions qui tendent vers la même limite l . L'encadrement provient souvent d'inégalités classiques ($-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$).

Voir la fiche méthode : [Utiliser les théorèmes de comparaison](#)

6. Quand utiliser les croissances comparées ?

Lorsqu'on rencontre une forme indéterminée mêlant exponentielle et polynôme. L'exponentielle « l'emporte » toujours : e^x croît plus vite que tout x^n en $+\infty$, et $x^n e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$.

Voir la fiche méthode : [Utiliser les croissances comparées](#)

7. Comment utiliser le nombre dérivé pour calculer une limite ?

Quand on reconnaît la forme $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (indétermination $\frac{0}{0}$), la limite vaut $f'(a)$. Il suffit de calculer la dérivée et de remplacer x par a .

Voir la fiche méthode : [Calculer une limite à l'aide du nombre dérivé](#)