

Fonctions trigonométriques

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Résoudre une équation trigonométrique

Utiliser les formules d'addition de trigonométrie

Utiliser les formules de duplication

Dériver une fonction trigonométrique

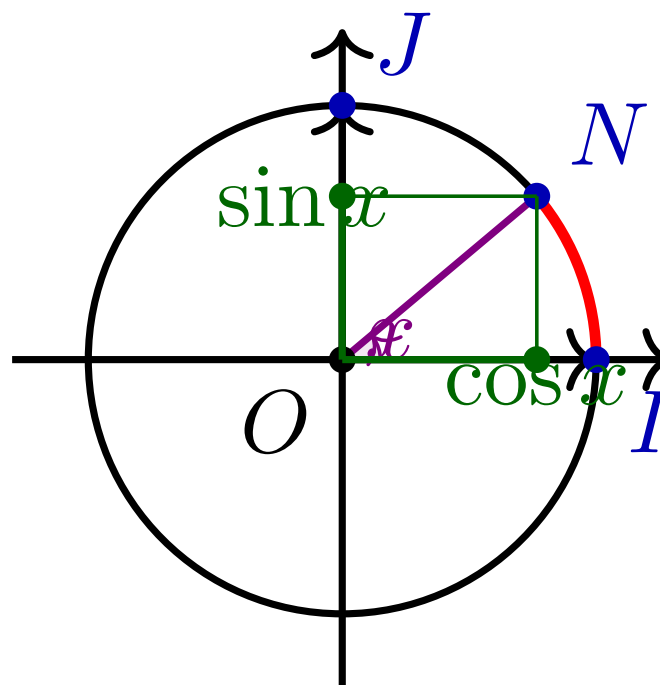
Étudier les variations d'une fonction trigonométrique

Résoudre une inéquation trigonométrique

1. Rappels

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$.

On oriente le **cercle trigonométrique** (cercle de centre O et de rayon 1) dans le **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre).



Définition

Soit N un point du cercle trigonométrique et x une mesure en radians de l'angle $(\vec{OI}, \vec{ON})$.

On appelle **cosinus** de x , noté $\cos x$ l'abscisse du point N .

On appelle **sinus** de x , noté $\sin x$ l'ordonnée du point N .

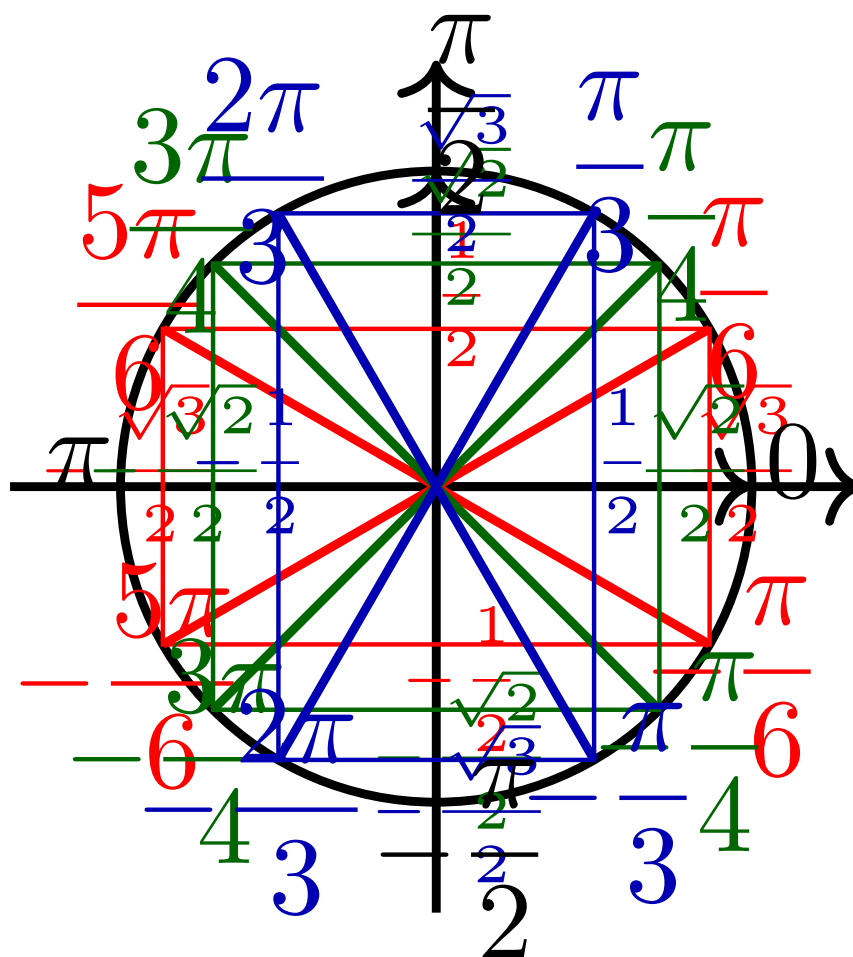
Remarque

Pour tout réel x :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ (d'après le théorème de Pythagore).

Quelques valeurs de sinus et de cosinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Théorème

Soit a un réel fixé.

Les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ sont les réels de la forme :

$$a + 2k\pi \text{ ou } -a + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ sont les réels de la forme :

$$a + 2k\pi \text{ ou } \pi - a + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Exemple

Soit l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Comme $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, l'équation peut s'écrire $\sin(x) = \sin \frac{\pi}{6}$.

D'après le théorème précédent, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Fonctions sinus et cosinus

Définition

La fonction, définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x associe son cosinus : $x \mapsto \cos(x)$ est appelée **fonction cosinus**.

La fonction, définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x associe son sinus : $x \mapsto \sin(x)$ est appelée **fonction sinus**.



Formules de base

Pour tout réel x :

- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π .

- $\cos(-x) = \cos(x)$ (la fonction cosinus est paire)
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ (la fonction sinus est impaire)
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.



Remarque

A partir des formules de base on peut montrer d'autres formules ; par exemple :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(-x) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-x) = \cos(x)$$

etc.



Formules d'addition

Pour tous réels a et b :

- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$



Remarque

En remplaçant b par $-b$ et en utilisant la parité des fonctions sinus et cosinus on obtient les formules de soustraction :

- $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$



Propriété (formules de duplication)

Pour tout réel a :

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$.



Remarque

- On démontre ces formules en posant $b = a$ dans les formules d'addition et en utilisant $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$.
- Rappel : $\sin^2(a)$ et $\cos^2(a)$ sont des écritures simplifiées pour $(\sin(a))^2$ et $(\cos(a))^2$.

3. Étude des fonctions sinus et cosinus



Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont **dérivables** sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont :

$$\begin{aligned}\sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin\end{aligned}$$



Propriété

Soient a et b deux réels quelconques. Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f : x \mapsto \sin(ax + b)$
- $g : x \mapsto \cos(ax + b)$

sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

- $f'(x) = a \cos(ax + b)$
- $g'(x) = -a \sin(ax + b)$

Plus généralement, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et f et g définies sur I par :

- $f : x \mapsto \sin(u(x))$
- $g : x \mapsto \cos(u(x))$

alors f et g sont dérivables sur I et :

- $f'(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$
- $g'(x) = -u'(x) \times \sin(u(x))$



Remarque

C'est un cas particulier du théorème de dérivation de fonctions composées.

Limites

Les fonctions sinus et cosinus **ne possèdent pas de limite** quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Par contre on démontre le résultat suivant :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Remarque

Cette dernière limite peut s'obtenir en utilisant la définition du nombre dérivé de la fonction sinus pour $x = 0$ (voir fiche méthode Calculer une limite à l'aide du nombre dérivé).

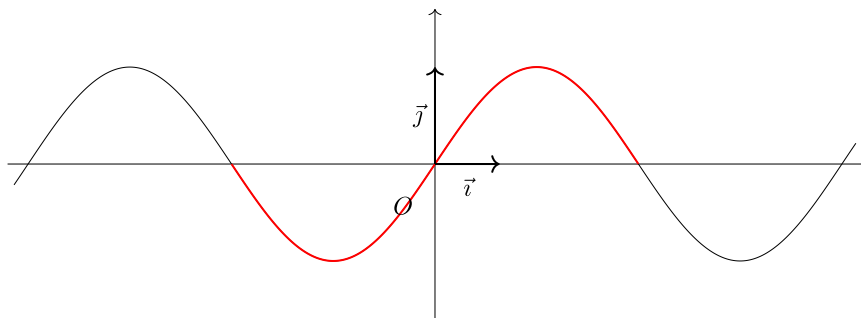
Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques, il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π , par exemple $[-\pi; \pi]$.

Pour obtenir la courbe complète, on effectue ensuite des translations de vecteurs $\pm 2\pi\vec{i}$.

Fonction sinus

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π			
$f'(x) = \cos(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(x) = \sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Tableau de variation de la fonction sinus

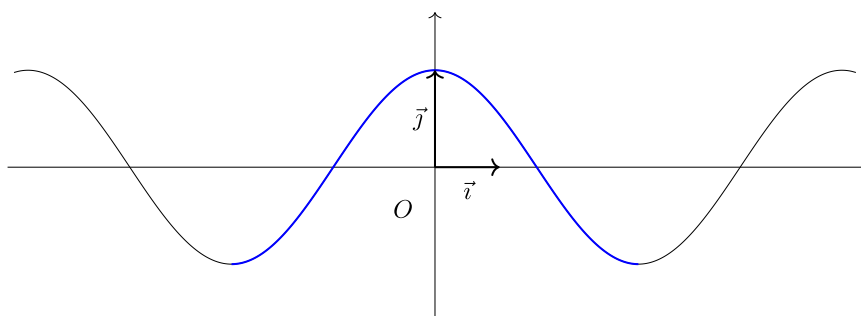


Représentation graphique de la fonction sinus

Fonction cosinus

x	$-\pi$	0	π
$f'(x) = -\sin x$	$+$	0	$-$
$f(x) = \cos x$	-1	1	-1

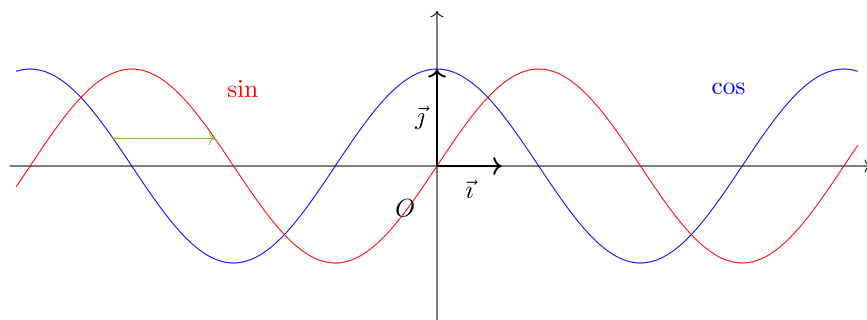
Tableau de variation de la fonction cosinus



Représentation graphique de la fonction cosinus

Remarque

La relation $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ montre que la courbe de la fonction sinus se déduit de la courbe de la fonction cosinus par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.



Position relative des deux courbes

Les questions essentielles

1. Comment résoudre une équation du type $\cos(x) = \cos(a)$ ou $\sin(x) = \sin(a)$?

On applique le théorème de résolution : pour $\cos(x) = \cos(a)$, les solutions sont $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$; pour $\sin(x) = \sin(a)$, les solutions sont $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Sur un intervalle donné, on sélectionne les valeurs de k qui conviennent.

Voir la fiche méthode : [Résoudre une équation trigonométrique](#)

2. Comment utiliser les formules d'addition pour calculer une valeur exacte ?

On décompose l'angle en somme ou différence d'angles remarquables $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$, puis on applique les formules $\cos(a \pm b)$ ou $\sin(a \pm b)$ et on remplace par les valeurs connues.

Voir la fiche méthode : [Utiliser les formules d'addition de trigonométrie](#)

3. Comment utiliser les formules de duplication pour simplifier ou linéariser ?

On reconnaît dans l'expression un produit $2 \sin(a) \cos(a)$ (qui donne $\sin(2a)$) ou un carré $\cos^2(a)$, $\sin^2(a)$ que l'on transforme à l'aide des formules de duplication. La

linéarisation consiste à éliminer les carrés : $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$.

Voir la fiche méthode : [Utiliser les formules de duplication](#)

4. Comment dériver une fonction trigonométrique composée ?

On identifie la forme de la fonction ($\sin(u)$ ou $\cos(u)$) et on applique la formule de dérivation des fonctions composées : $(\sin(u))' = u' \cos(u)$ et $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$. Le facteur u' ne doit pas être oublié.

Voir la fiche méthode : [Dériver une fonction trigonométrique](#)

5. Comment étudier les variations d'une fonction trigonométrique ?

On détermine d'abord la période et la parité pour réduire l'intervalle d'étude. Puis on calcule la dérivée, on étudie son signe, et on dresse le tableau de variations avec les valeurs aux bornes et aux extremums.

Voir la fiche méthode : [Étudier les variations d'une fonction trigonométrique](#)

6. Comment résoudre une inéquation trigonométrique ?

On se ramène à comparer $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ à une valeur remarquable, puis on lit les solutions sur le cercle trigonométrique avant de les exprimer sur l'intervalle demandé en tenant compte de la périodicité.

Voir la fiche méthode : [Résoudre une inéquation trigonométrique](#)

