

Continuité, dérivabilité, convexité

DURÉE ESTIMÉE

35 minutes

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE

Étudier la continuité d'une fonction par morceaux

Montrer l'existence d'une solution avec le TVI

Montrer l'unicité d'une solution (corollaire du TVI)

Dériver une fonction composée

Étudier la convexité d'une fonction

1. Fonctions continues



Définition

Une fonction définie sur un intervalle I est *continue* sur I si l'on peut tracer sa courbe représentative *sans lever le crayon*



Exemple

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle contenu dans leur ensemble de définition.
- La fonction *racine carrée* est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont continues sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Si f et g sont continues sur I , les fonctions $f + g$, kf ($k \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont continues sur I .

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I , la fonction $\frac{f}{g}$, est continue sur I .

Théorème (lien entre continuité et dérivabilité)

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur I .

Remarque

Attention ! La réciproque est fausse.

Par exemple, la fonction valeur absolue ($x \mapsto |x|$) est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier mais n'est pas dérivable en 0.

Propriété (lien entre continuité et limite)

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, alors pour tout $\alpha \in [a; b]$:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha).$$

Exemple

Montrons à l'aide de cette propriété que la fonction «partie entière » (notée $x \mapsto E(x)$), qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x , n'est pas continue en 1.

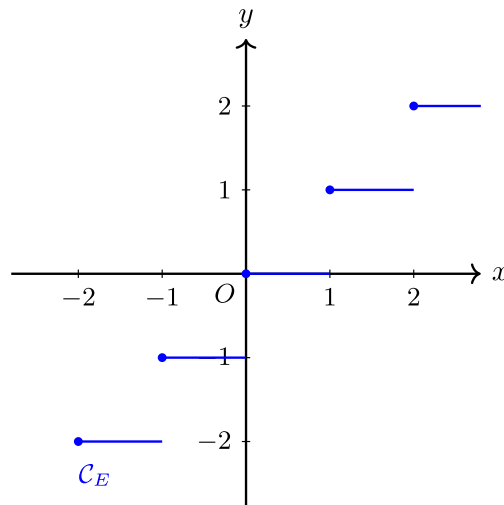
Si x est un réel positif et strictement inférieur à 1, sa partie entière vaut 0.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0.$$

Par ailleurs, la partie entière de 1 vaut 1 c'est à dire $E(1) = 1$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) \neq E(1)$.

La fonction « partie entière » n'est donc pas continue en 1 (en fait, elle est discontinue en tout point d'abscisse entière).



Fonction « partie entière »

2. Continuité des fonctions définies par morceaux

🔗 Méthode (étudier la continuité d'une fonction par morceaux)

Pour étudier la continuité d'une fonction f définie par morceaux sur un intervalle :

1. Vérifier que f est continue sur chacun des morceaux (fonctions usuelles).
2. Aux points de raccord x_0 , calculer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.
3. Si les deux limites sont égales à $f(x_0)$, la fonction est continue en x_0 .

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Les fonctions $x \mapsto 2x + 1$ et $x \mapsto x^2$ sont des polynômes, donc continues sur $\mathbb{R}$.

Il reste à étudier la continuité au point de raccord $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 = 1$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, la fonction f **n'est pas continue** en 1, donc n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

3. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b]$ et si y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = y_0$ admet **au moins une** solution sur l'intervalle $[a; b]$.

Remarque

- Ce théorème dit que l'équation $f(x) = y_0$ admet **une ou plusieurs solutions** mais ne permet pas de déterminer le nombre de ces solutions. Dans les exercices où l'on recherche le nombre de solutions, il faut utiliser le corollaire ci-dessous.
- **Cas particulier fréquent** : Si f est continue et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$ (en effet, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$).



Corollaire (du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$ et si y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y_0$ admet une **unique** solution sur l'intervalle $[a; b]$.



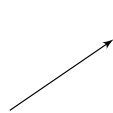
Remarque

- Ce dernier théorème est aussi parfois appelé « **Théorème de la bijection** »
- Il faut vérifier **3 conditions** pour pouvoir appliquer ce corollaire :
- f est continue sur $[a; b]$;
- f est strictement croissante ou strictement décroissante sur $[a; b]$;
- y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Les deux théorèmes précédents se généralisent à un intervalle ouvert $]a; b[$ où a et b sont éventuellement infinis. Il faut alors remplacer $f(a)$ et $f(b)$ (qui ne sont alors généralement pas définis) par $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$



Exemple

Soit une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ dont le tableau de variation est fourni ci-dessous :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		1  $-\infty$

On cherche à déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$.

L'unique flèche oblique montre que la fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

-1 est compris entre $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = -1$ admet une **unique** solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. Calcul de dérivées

Le tableau ci-dessous recense les dérivées usuelles à connaître en Terminale. Pour faciliter les révisions, toutes les formules du programme ont été recensées ; certaines seront étudiées dans les chapitres ultérieurs.



Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$k \ (k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$



Propriété

Soient une fonction f définie et dérivable sur un certain intervalle et a et b deux réels.

Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable là où elle est définie et :

$$g'(x) = af'(ax + b)$$



Exemple

- La fonction $f : x \mapsto (5x + 2)^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 5 \times 3(5x + 2)^2 = 15(5x + 2)^2.$$

- En particulier, si $g(x) = f(-x)$ on a $g'(x) = -f'(-x)$.

Par exemple la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est la fonction $x \mapsto -e^{-x}$.

Remarque

Le résultat précédent se généralise à l'aide du théorème suivant :

Théorème (dérivées des fonctions composées)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J et soit f une fonction dérivable sur J .

Alors la fonction $g : x \mapsto f(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

Exemple

Soit u une fonction dérivable sur intervalle I :

- la fonction u^n est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \times nu^{n-1}$;
- la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur la partie de I où $u \neq 0$ et sa dérivée est $-\frac{u'}{u^2}$;
- la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur la partie de I où $u > 0$ et sa dérivée est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$;
- la fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \times \cos(u)$;
- la fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $-u' \times \sin(u)$;
- la fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \times e^u$;

- la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur la partie de I où $u > 0$ et sa dérivée est $\frac{u'}{u}$.

5. Convexité

Définition (fonction convexe, fonction concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- On dit que f est **convexe** sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessus** de toutes ses tangentes sur I .
- On dit que f est **concave** sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessous** de toutes ses tangentes sur I .

Remarque

Graphiquement, une fonction convexe est « tournée vers le haut » (forme $\cup$) et une fonction concave est « tournée vers le bas » (forme $\cap$).

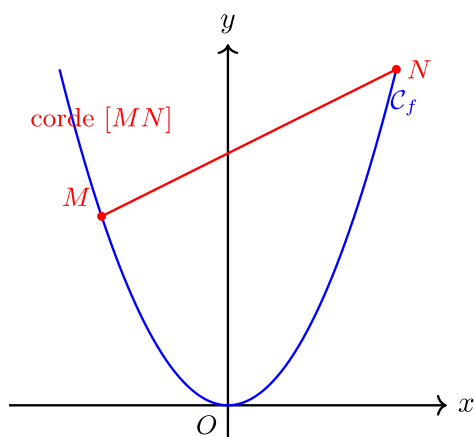
Caractérisation par les cordes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On appelle **corde** de $\mathcal{C}_f$ tout segment $[MN]$ reliant deux points M et N de la courbe.

- f est **convexe** sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessous** de chacune de ses cordes sur I .
- f est **concave** sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessus** de chacune de ses cordes sur I .

Exemple

Sur la figure ci-dessous, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe : entre les points M et N , la courbe $\mathcal{C}_f$ reste bien **sous** la corde $[MN]$.



Remarque

Les trois caractérisations de la convexité sont équivalentes : pour une fonction f deux fois dérivable sur I , dire que $\mathcal{C}_f$ est sous ses cordes, dire que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes, dire que f' est croissante et dire que $f''(x) \geq 0$ sur I reviennent exactement au même. La caractérisation par les cordes a l'avantage de ne supposer **aucune dérivabilité** de f .

Théorème (caractérisation par la dérivée)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est convexe sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I .
- f est concave sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I .



Définition (dérivée seconde)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I dont la fonction dérivée f' est elle-même dérivable sur I . On appelle **dérivée seconde** de f la dérivée de f' , notée f'' :

$$f''(x) = (f'(x))'$$



Remarque

L'étude de la convexité se ramène alors à l'étude du signe de f'' .



Théorème (caractérisation par la dérivée seconde)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.



Exemple

- La fonction $f : x \mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$.

Comme $f''(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est **convexe** sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $g : x \mapsto x^3$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2$ et $g''(x) = 6x$.

Donc $g''(x) \leq 0$ sur $] -\infty; 0]$: g est **concave** sur $] -\infty; 0]$.

Et $g''(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$: g est **convexe** sur $[0; +\infty[$.

Définition (point d'inflexion)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Un point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a \in I$ est un **point d'inflexion** si la courbe $\mathcal{C}_f$ **traverse sa tangente** au point A .

Propriété

En un point d'inflexion, la fonction f change de convexité : elle passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

Théorème (caractérisation d'un point d'inflexion)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Le point A d'abscisse a est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si f'' **s'annule et change de signe** en a .

Remarque

Attention ! Il ne suffit pas que $f''(a) = 0$ pour que A soit un point d'inflexion : il faut en plus que f'' change de signe en a . Par exemple, pour $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ mais $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ ne change pas de signe : l'origine **n'est pas** un point d'inflexion.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = x^2 - 2x \text{ et } f''(x) = 2x - 2.$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et f'' change de signe en 1 (négative avant, positive après).

Donc le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = \frac{1}{3}$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$.

De plus, f est **concave** sur $] -\infty; 1]$ et **convexe** sur $[1; +\infty[$.

6. Application aux suites



Théorème (point fixe)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

Si la suite (u_n) converge vers un réel $L \in I$, alors L est solution de l'équation :

$$f(L) = L$$



Remarque

Ce théorème est très utile pour déterminer la limite d'une suite définie par récurrence : si l'on sait que la suite converge, on résout l'équation $f(x) = x$ pour trouver sa limite.



Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On admet que la suite (u_n) converge vers un réel L .

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine).

D'après le théorème du point fixe, L vérifie :

$f(L) = L$, soit $\frac{1}{2}L + 3 = L$, d'où $3 = \frac{1}{2}L$, et finalement **$L = 6$** .

Les questions essentielles

1. Comment étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux ?

On vérifie que chaque morceau est continu (fonctions usuelles), puis on étudie les raccords : en chaque point de jonction x_0 , on calcule les limites à gauche et à droite et on vérifie qu'elles sont égales à $f(x_0)$.

Voir la fiche méthode : [Étudier la continuité d'une fonction par morceaux](#)

2. Comment montrer qu'une équation admet au moins une solution ?

On utilise le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) : on vérifie que f est continue sur $[a; b]$ et que la valeur cherchée est comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. En particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution.

Voir la fiche méthode : [Montrer l'existence d'une solution avec le TVI](#)

3. Comment montrer qu'une équation admet une unique solution ?

On utilise le corollaire du TVI (théorème de la bijection) : en plus de la continuité, on vérifie que f est strictement monotone sur l'intervalle. Les trois conditions sont : continuité, monotonie stricte, et la valeur cherchée comprise entre les valeurs aux bornes.

Voir la fiche méthode : [Montrer l'unicité d'une solution \(corollaire du TVI\)](#)

4. Comment dériver une fonction composée ?

On identifie la fonction extérieure f et la fonction intérieure u , puis on applique la formule : la dérivée de $f(u(x))$ est $u'(x) \times f'(u(x))$. Les cas les plus courants sont e^u , $\ln(u)$, $\sqrt{u}$ et u^n .

Voir la fiche méthode : [Dériver une fonction composée](#)

5. Comment étudier la convexité d'une fonction et trouver les points d'inflexion ?

On calcule la dérivée seconde f'' et on étudie son signe : f est convexe là où $f'' \geq 0$ et concave là où $f'' \leq 0$. Les points d'inflexion sont les abscisses où f'' s'annule en changeant de signe.

Voir la fiche méthode : [Étudier la convexité d'une fonction](#)