

Droites et plans dans l'espace

DURÉE ESTIMÉE

35 minutes

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE

Déterminer la position relative de deux droites dans l'espace

Démontrer que deux plans sont parallèles

Montrer que des vecteurs sont colinéaires dans l'espace

Montrer que des vecteurs sont coplanaires

Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Déterminer une représentation paramétrique d'un plan

1. Rappels sur les droites et plans



Propriété

Par deux points distincts de l'espace, il passe une et une seule droite.



Remarque

Dans les exercices où l'on cherche à déterminer une droite (par exemple, pour tracer l'intersection de deux plans), il suffira donc de trouver deux points distincts qui appartiennent à cette droite.



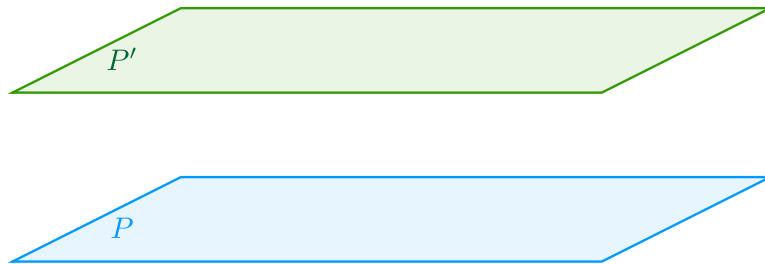
Propriété

Par trois points distincts et **non alignés** de l'espace, il passe un et un seul plan.

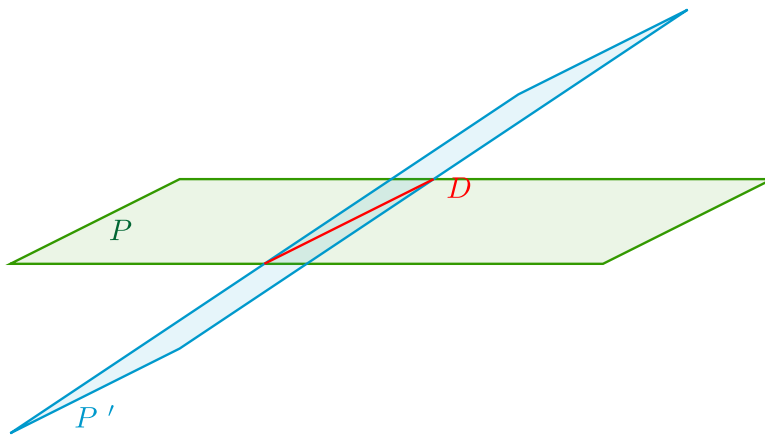
Positions relatives de deux plans

Deux plans distincts de l'espace peuvent être :

- **strictement parallèles** : dans ce cas, ils n'ont aucun point commun
- **sécants** : dans ce cas, leur intersection est une droite



Plans parallèles



Plans sécants

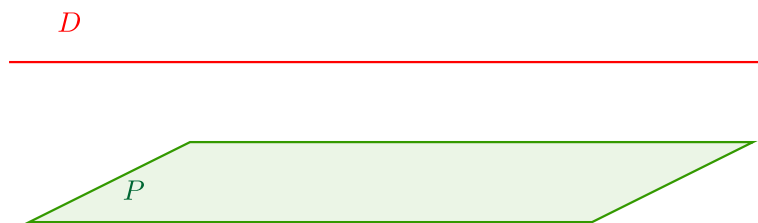


Positions relatives d'une droite et d'un plan

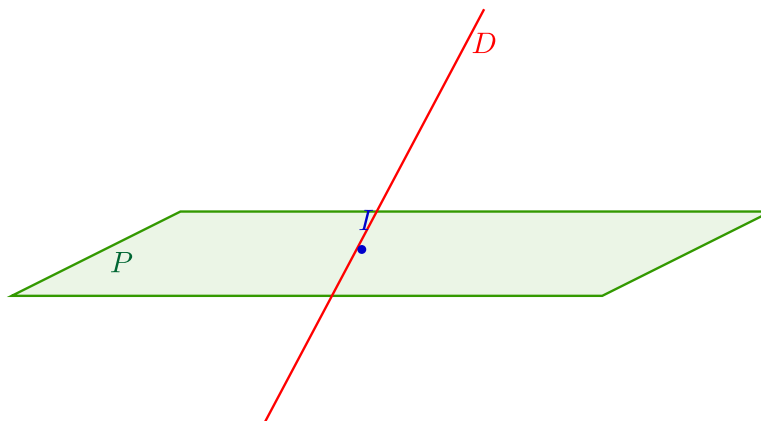
Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.

La droite $\mathcal{D}$ peut être :

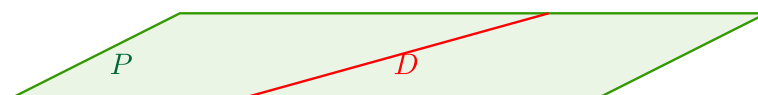
- **strictement parallèle** au plan $\mathcal{P}$: dans ce cas, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun
- **sécante** avec le plan $\mathcal{P}$: dans ce cas, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un unique point commun
- **contenue** dans le plan $\mathcal{P}$



Droite strictement parallèle à un plan



Droite sécante à un plan



Droite contenue (incluse) dans un plan

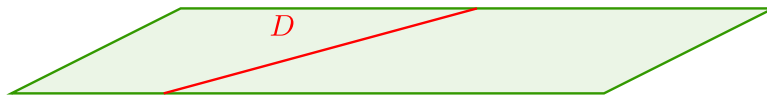


Positions relatives de deux droites

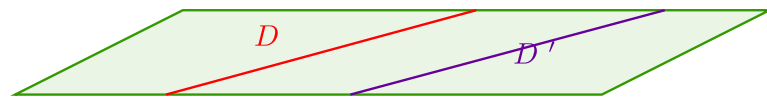
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes de l'espace.

Ces droites peuvent être :

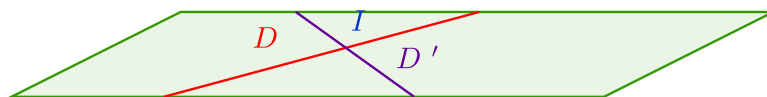
- **non coplanaires** : dans ce cas, elles n'ont aucun point commun
- **coplanaires**, c'est-à-dire contenues dans un même plan ; elles peuvent alors être :
- **strictement parallèles** : dans ce cas, elles n'ont aucun point commun
- **sécantes** : dans ce cas, leur intersection est un point



Droites non coplanaires



Droites strictement parallèles

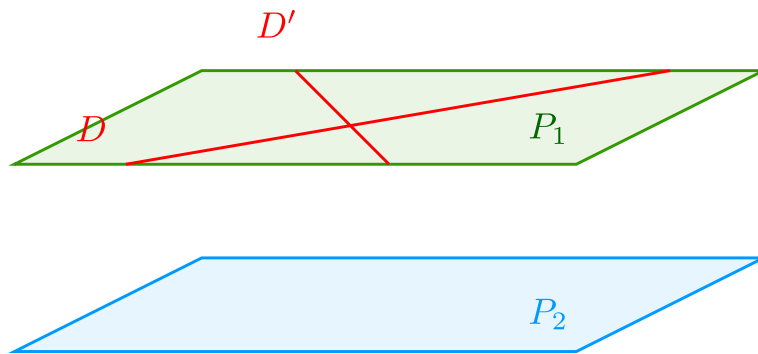


Droites sécantes

2. Parallélisme

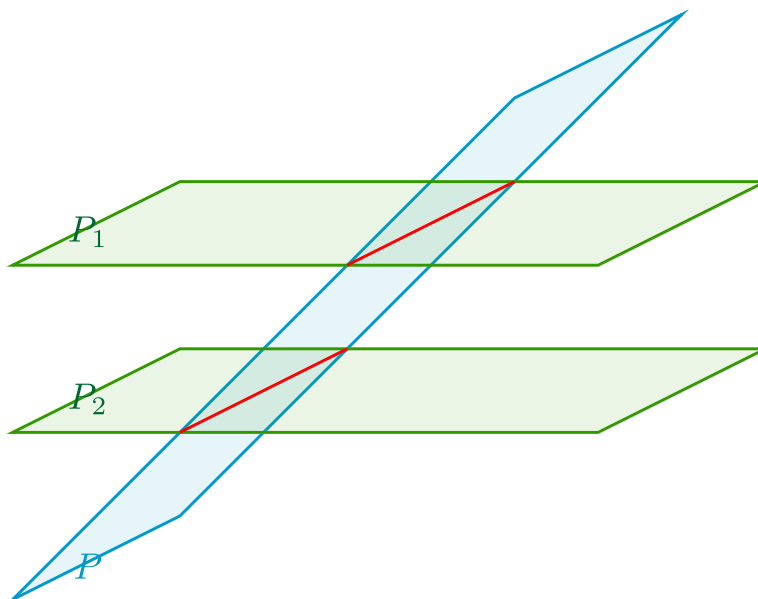
Propriété

Si un plan $\mathcal{P}_1$ contient deux droites sécantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles à un plan $\mathcal{P}_2$, alors le plan $\mathcal{P}_1$ est parallèle au plan $\mathcal{P}_2$.



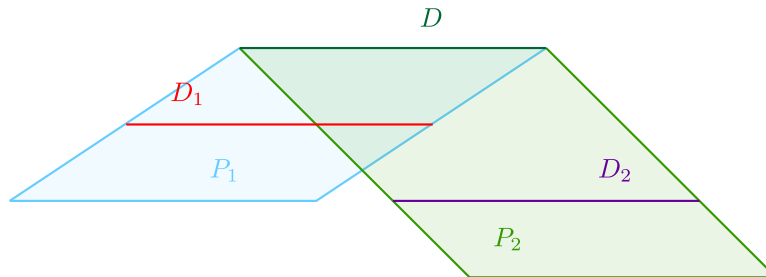
Propriété

Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles, alors tout plan $\mathcal{P}$ sécant à $\mathcal{P}_1$ est sécant à $\mathcal{P}_2$ et leurs intersections sont deux droites parallèles.



Propriété (Théorème du toit)

Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans sécants et si une droite $\mathcal{D}_1$ incluse dans $\mathcal{P}_1$ est parallèle à une droite $\mathcal{D}_2$ incluse dans $\mathcal{P}_2$ alors la droite $\mathcal{D}$ intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.



3. Vecteurs de l'espace

Définition (vecteurs colinéaires)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque

- Par convention, on considèrera que le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à n'importe quel vecteur de l'espace
- Intuitivement, deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même «direction» (mais pas nécessairement le même «sens»). La notion de vecteurs colinéaires est à rapprocher de la notion de droites parallèles (voir théorème ci-dessous).

Propriété

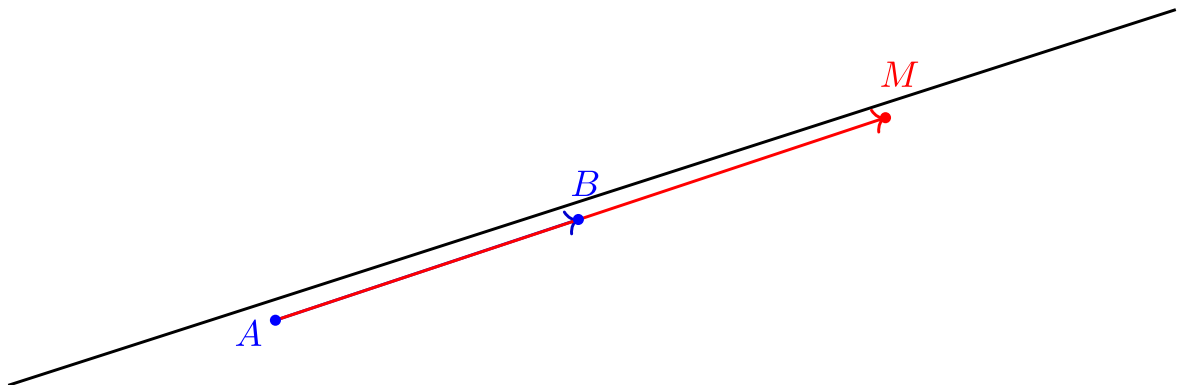
Soient quatre points distincts A , B , C et D .

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété

Soient deux points distincts A et B .

Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.



Remarque

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de la droite $\mathcal{D}$ est appelé **vecteur directeur** de $\mathcal{D}$.

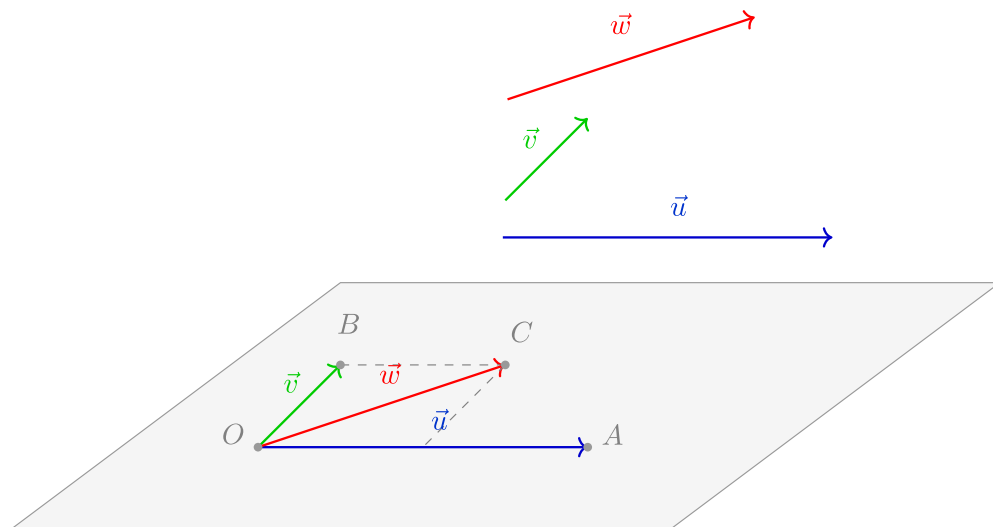
Définition (vecteurs coplanaires)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires. On dit que le vecteur $\vec{w}$ est coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement s'il existe deux réels k et k' tels que :

$$\vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}$$

Remarque

- Intuitivement, le fait que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires signifie que si on choisit quatre points O, A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ alors les points O, A, B et C appartiennent à un même plan.



Sur la figure ci-dessus, $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$

- La définition précédente peut se généraliser à plus de trois vecteurs. Pour **deux** vecteurs, par contre, elle n'a guère d'intérêt car deux vecteurs sont toujours coplanaires
- Pour des vecteurs ou des points coplanaires, on peut se placer dans le plan contenant ces points ou ces vecteurs et appliquer les résultats classiques de géométrie plane (théorème des milieux, théorème de Thalès, relation de Chasles, etc.)



Combinaison linéaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Tout vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, avec a , b et c réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.



Remarque

Dire que $\vec{w}$ est coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ revient à dire que $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

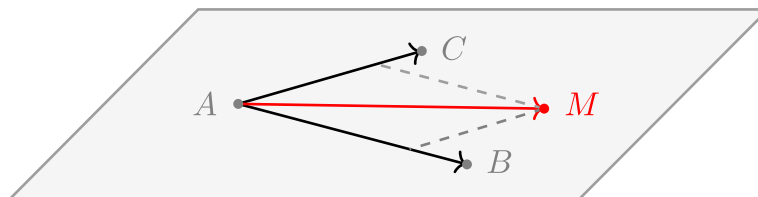


Propriété

Soient A, B, C trois points non alignés.

Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si et seulement s'il existe deux réels k et k' tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$$



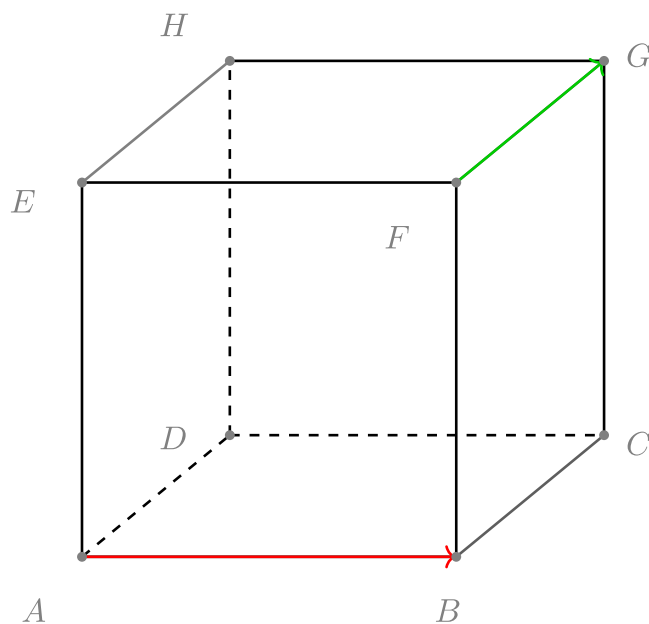
Remarque

Attention ! Notez que dans la propriété ci-dessus, tous les vecteurs ont la même origine A .

Le fait que des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient coplanaires ne signifie pas que les points A, B, C, D soient coplanaires.

Par exemple, si on considère le cube ci-dessous, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires (parce que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$ ou tout simplement parce que **deux** vecteurs sont toujours coplanaires !) mais les points

A, B, F et G ne le sont pas.



Vecteurs coplanaires - Points non coplanaires

4. Bases, repérage et représentations paramétriques

Base de l'espace

Soient $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace. Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé **base de l'espace**.

Propriété

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(a ; b ; c)$ tel que :

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

On dit que $\vec{u}$ se **décompose** dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Remarque

Cette propriété est fondamentale : elle signifie que tout vecteur de l'espace peut s'exprimer de façon unique comme combinaison linéaire de trois vecteurs non coplanaires.

Définition

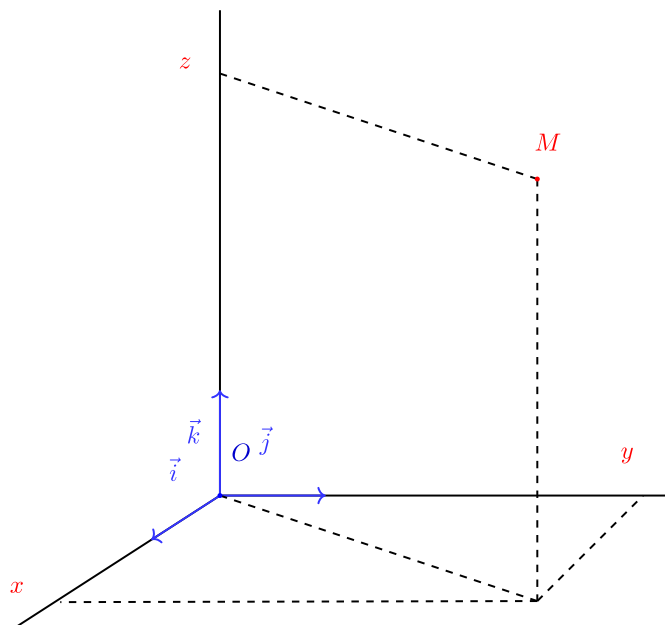
Un **repère de l'espace** est un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

Définition

Pour tout point M de l'espace, il existe trois réels x, y et z tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$(x ; y ; z)$ s'appellent les **coordonnées** de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Remarque

- x, y et z s'appellent respectivement l'**abscisse**, l'**ordonnée** et la **cote** du point M
- Comme dans le plan, on définit également les coordonnées d'un vecteur de la façon suivante :

les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Propriété

Pour tous points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- le point M milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

Remarque

Les notions relatives aux repères orthonormés, distances, etc. sont abordées dans le chapitre «Orthogonalité et produit scalaire »



Théorème et définition (Représentation paramétrique d'une droite)

Un point $M(x; y; z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ si et seulement s'il existe un réel k tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + ak \\ y = y_A + bk \\ z = z_A + ck \end{cases}$$

avec

$$k \in \mathbb{R}$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique de la droite** $\mathcal{D}$



Démonstration

Elle est immédiate en utilisant :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$$



Remarque

Une droite admet une infinité de représentations paramétriques



Exemple

La droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 1)$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$$

avec

$$k \in \mathbb{R}$$



Théorème et définition (Représentation paramétrique d'un plan)

Soient $\mathcal{P}$ un plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{u}'(a'; b'; c')$ deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement s'il existe deux réels k et k' tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + ak + a'k' \\ y = y_A + bk + b'k' \\ z = z_A + ck + c'k' \end{cases}$$

avec

$$k \in \mathbb{R}$$

et

$$k' \in \mathbb{R}$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique du plan** $\mathcal{P}$



Démonstration

On utilise le fait que :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est coplanaire à } \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{u}'$$



Remarque

Là encore, un plan admet une infinité de représentations paramétriques.

Exemple

Le plan (xOy) passe par l'origine et $\vec{i}(1 ; 0 ; 0)$ et $\vec{j}(0 ; 1 ; 0)$ sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan. Une représentation paramétrique du plan (xOy) est donc :

$$\begin{cases} x = k \\ y = k' \\ z = 0 \end{cases}$$

avec

$$(k, k') \in \mathbb{R}^2$$

Les questions essentielles

1. Comment déterminer la position relative de deux droites dans l'espace ?

On commence par tester la colinéarité des vecteurs directeurs. Si les vecteurs sont colinéaires, les droites sont parallèles (ou confondues). Sinon, on cherche un point d'intersection : s'il existe, les droites sont sécantes ; sinon, elles sont non coplanaires.

Voir la fiche méthode : [Déterminer la position relative de deux droites dans l'espace](#)

2. Comment démontrer que deux plans sont parallèles ?

Il faut trouver dans le premier plan deux droites sécantes, chacune parallèle à une droite du second plan. On utilise la colinéarité des vecteurs directeurs ou le théorème des milieux pour justifier les parallélismes.

Voir la fiche méthode : [Démontrer que deux plans sont parallèles](#)

3. Comment montrer que des vecteurs sont colinéaires dans l'espace ?

On cherche un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire que chaque coordonnée du premier vecteur soit k fois la coordonnée correspondante du second. Cela permet de prouver l'alignement de points ou le parallélisme de droites.

Voir la fiche méthode : [Montrer que des vecteurs sont colinéaires dans l'espace](#)

4. Comment montrer qu'un point appartient à un plan ?

On exprime le vecteur reliant un point du plan au point considéré comme combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs du plan. Si la décomposition existe (système compatible), le point appartient au plan.

Voir la fiche méthode : [Montrer que des vecteurs sont coplanaires](#)

5. Comment déterminer une représentation paramétrique d'une droite ?

On identifie un point A de la droite et un vecteur directeur $\vec{u}$, puis on écrit le système :
 $x = x_A + at, y = y_A + bt, z = z_A + ct$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer une représentation paramétrique d'une droite](#)

6. Comment déterminer une représentation paramétrique d'un plan ?

On choisit un point A du plan et deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis on écrit le système à deux paramètres : $x = x_A + as + a't, y = y_A + bs + b't, z = z_A + cs + c't$ avec $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer une représentation paramétrique d'un plan](#)