

Dénombrement

DURÉE ESTIMÉE

30 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Dénombrer à l'aide du principe multiplicatif

Calculer une factorielle et dénombrer des permutations

Calculer le nombre d'arrangements

Calculer un coefficient binomial

Utiliser le triangle de Pascal

Choisir la bonne formule de dénombrement

1. Ensembles et cardinaux



Définition

Soit E un ensemble fini.

On appelle **cardinal** de l'ensemble E et on note $\text{card}(E)$ le nombre d'éléments de E .



Exemple

Si $E = \{a ; b ; c ; d\}$, alors $\text{card}(E) = 4$.



Définition

Soit E un ensemble quelconque. On dit que F est une **partie** de E (ou un **sous-ensemble** de E) si et seulement si tous les éléments de F appartiennent également à E .

On note alors $F \subset E$ (F « inclus » dans E).

Exemple

Si $E = \{ a ; b ; c ; d \}$, $F = \{ b ; c \}$ et $G = \{ d \}$
alors $F \subset E$, $G \subset E$ mais $G \not\subset F$.

Remarque

L'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble E lui-même sont des parties de E .

Théorème

Le nombre de parties d'un ensemble de n éléments est 2^n .

Exemple

L'ensemble $E = \{ a ; b ; c \}$ possède $2^3 = 8$ sous-ensembles :
 $\emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a ; b \}, \{ a ; c \}, \{ b ; c \}, \{ a ; b ; c \}$.

Définition (Réunion de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles quelconques.

La **réunion** des ensembles A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B (ou aux deux ensembles).

Exemple

Si $A = \{ a ; b ; c \}$ et $B = \{ a ; c ; d ; e \}$
alors $A \cup B = \{ a ; b ; c ; d ; e \}$.

Définition (Intersection de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles quelconques.

L'**intersection** des ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

Exemple

Si on reprend l'exemple précédent : $A = \{ a ; b ; c \}$ et $B = \{ a ; c ; d ; e \}$
alors $A \cap B = \{ a ; c \}$.

Définition (Produit cartésien)

Soient A et B deux ensembles non vides.

Le **produit cartésien** de A par B, noté $A \times B$ (A « croix » B), est l'ensemble des couples (a ; b) où $a \in A$ et $b \in B$.

Remarque

- un couple s'écrit avec des parenthèses et un ensemble avec des accolades.
- l'ordre a de l'importance dans un couple (c'est-à-dire que les couples (a ; b) et (b ; a) sont différents).
- on définit de même le produit cartésien de 3 ensemble ou plus. $A \times B \times C$ est l'ensemble des triplets (a ; b ; c) où $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$.
- on définit également $A^p = A \times A \times \dots \times A$ (p fois). Cet ensemble est composé de toutes les listes ordonnées de p éléments de A.

Exemple

Si $A = \{ a ; b \}$ et $B = \{ 1 ; 2 ; 3 \}$

alors $A \times B = \{ (a ; 1) ; (a ; 2) ; (a ; 3) ; (b ; 1) ; (b ; 2) ; (b ; 3) \}$

et $A^2 = \{ (a ; a) ; (a ; b) ; (b ; a) ; (b ; b) \}$.

Propriété (Principe additif)

Si A et B sont deux ensembles finis **disjoints** (c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$), alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Remarque

Dans le cas où A et B ne sont pas nécessairement disjoints, on a la formule plus générale :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Propriété (Principe multiplicatif)

Si A et B sont deux ensembles finis non vides, alors :

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$

Exemple

Si l'on reprend l'exemple précédent $A = \{ a ; b \}$, $B = \{ 1 ; 2 ; 3 \}$

et $A \times B = \{ (a ; 1) ; (a ; 2) ; (a ; 3) ; (b ; 1) ; (b ; 2) ; (b ; 3) \}$

alors :

$\text{card}(A) = 2$, $\text{card}(B) = 3$ et

$\text{card}(A \times B) = 2 \times 3 = 6$ ($A \times B$ contient 6 couples !)

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel non nul.

Le nombre de p -uplets d'éléments de E (avec répétition possible) est :

$$\text{card}(E^p) = n^p$$

Exemple

On lance deux dés à six faces. L'ensemble des résultats possibles pour un dé est $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

L'ensemble des résultats possibles pour deux dés est E^2 , soit l'ensemble des couples.

Le nombre de résultats est donc $6^2 = 36$.

2. Permutations et p -uplets

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Une **permutation** de E est une liste ordonnée comportant les n éléments de E sans répétition.

Exemple

Soit $E = \{ a ; b ; c \}$

E admet 6 permutations qui sont : $(a ; b ; c)$, $(a ; c ; b)$, $(b ; a ; c)$, $(b ; c ; a)$, $(c ; a ; b)$ et $(c ; b ; a)$.

Remarque

- dans les notations avec parenthèses du type $(a ; b ; c)$ l'ordre **est** pris en compte. (il s'agit d'une liste ordonnée)

- dans les notations avec accolades du type $\{ a ; b ; c \}$ l'ordre **n'est pas** pris en compte. (il s'agit d'un ensemble)

Théorème

Le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n éléments est le nombre **$n !$ (factorielle n)** défini par :

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 1$$

Remarque

- par convention on pose $0 ! = 1$
- pour tout entier $n > 0 : n! = n \times (n - 1) !$

Exemple

Si l'on reprend l'exemple précédent on vérifie bien que :

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Définition

Soit E un ensemble quelconque.

Un **p-uplet** de E est une liste **ordonnée** de p éléments de E .

Exemple

Soit $E = \{ a ; b ; c \}$:

$(a ; c ; a ; b ; a)$ est un 5-uplet de E .

Remarque

- un p -uplet de E est un élément de $E^p = E \times E \times \dots \times E$ (p fois) ;
- un 2-uplet est un couple ;
- un 3-uplet est un triplet, etc.

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel inférieur ou égal à n .
Un **arrangement** de p éléments de E est un p -uplet formé de p éléments distincts de E .

Exemple

Soit $A = \{ a ; b ; c ; d \}$,
 $(a ; b ; c)$ et $(b ; a ; d)$ sont deux arrangements de 3 éléments de A .
 $(a ; b ; a)$ n'est pas un arrangement car il possède deux éléments identiques.

Remarque

Une permutation d'un ensemble de n éléments n'est autre qu'un arrangement de n éléments de cet ensemble (par exemple $(b ; a ; d ; c)$ est une permutation de l'ensemble A de l'exemple précédent).

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel inférieur ou égal à n .
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est le nombre :

$$\begin{aligned} A_n^p &= n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) \\ &= \frac{n!}{(n - p)!} \end{aligned}$$

Exemple

8 coureurs participent à une course. Le nombre de podiums possibles (un podium = les trois premières places en tenant compte de l'ordre d'arrivée) est :

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336.$$

3. Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.

Une **combinaison** de p éléments de E est une partie de E contenant p éléments.

Remarque

Une partie est un ensemble donc l'**ordre n'est pas pris en compte**

Exemple

Soit $E = \{a; b; c\}$

E admet 3 combinaisons à 2 éléments qui sont : $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$

Théorème

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est le nombre noté $\binom{n}{p}$

(on lit « p parmi n ») égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

Exemple

- Dans l'exemple ci-dessus on a bien : $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \times 1!} = \frac{6}{2} = 3$
- Au poker une « *main* » est formée de 5 cartes parmi 52. Il y a donc :

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{47! \times 5!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2\,598\,960 \text{ combinaisons}$$

Propriété (Symétrie)

Pour tout entier naturel n et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Exemple

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

Propriété

- Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0} = 1$$

et

$$\binom{n}{n} = 1$$

.

- Pour tout entier naturel n et tout entier naturel k ($0 \leq k < n$) :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

.

Remarque

Ces propriétés permettent de calculer les combinaisons de proches en proches, grâce au *Triangle de Pascal*.

La figure ci-dessous représente ce triangle pour $n \leq 10$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Pour construire ce triangle on procède de la manière suivante :

- On place des «1» dans la colonne $k = 0$.
- On place des «1» sur la diagonale (qui correspond à $k = n$).
- On utilise la formule $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ pour calculer les autres coefficients.

Par exemple, pour trouver $\binom{7}{4} = 35$ on fait la somme des deux coefficients $\binom{6}{3} = 20$ et $\binom{6}{4} = 15$ de la ligne précédente.

Propriété

Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Démonstration

Soit E un ensemble de cardinal n .

- $\binom{n}{0}$ représente le nombre de parties de E ayant 0 élément ;
- $\binom{n}{1}$ représente le nombre de parties de E ayant 1 élément ;
- ...
- $\binom{n}{n}$ représente le nombre de parties de E ayant n éléments.
- Le total de ces combinaisons représente le nombre total de parties de E soit 2^n d'après un résultat vu au paragraphe 1.

4. Formule du binôme de Newton

Théorème (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel. Alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Autrement dit :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n$$

Remarque

Les coefficients $\binom{n}{k}$ qui apparaissent dans ce développement sont exactement les coefficients binomiaux : ce sont les nombres de la ligne n du triangle de Pascal. Pour développer $(a + b)^n$, il suffit donc de lire la ligne n du triangle, puis de faire décroître la puissance de b de n à 0 tandis que

celle de a croît de 0 à n . La relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ permet de passer d'une ligne à la suivante sans aucun calcul de factorielle.

Développement de $(a+b)^4$

La ligne $n = 4$ du triangle de Pascal est : 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1.

On obtient donc :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

On peut vérifier la cohérence avec la somme des coefficients : $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$, ce qui correspond bien à la valeur de $(a+b)^4$ pour $a = b = 1$.

Développement de $(1+x)^n$

En posant $a = x$ et $b = 1$, le développement se simplifie car toutes les puissances de b valent 1 :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + x^n$$

Par exemple, pour $n = 5$ (ligne 1 ; 5 ; 10 ; 10 ; 5 ; 1 du triangle) :

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

En particulier, pour $x = 1$, on retrouve $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \cdots + \binom{5}{5} = 2^5 = 32$, en accord avec la formule de la somme des coefficients binomiaux.

Les questions essentielles

1. Comment dénombrer des résultats avec des choix successifs ?

Identifier les choix indépendants et multiplier les nombres de possibilités entre eux (principe multiplicatif). Si les p choix portent sur le même ensemble de n éléments avec répétition, le résultat est n^p .

Voir la fiche méthode : [Dénombrer à l'aide du principe multiplicatif](#)

2. Comment calculer une factorielle et dénombrer des permutations ?

On calcule $n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 1$. Ce nombre donne le nombre de façons de ranger tous les éléments d'un ensemble de n éléments dans un certain ordre.

Voir la fiche méthode : [Calculer une factorielle et dénombrer des permutations](#)

3. Comment calculer le nombre d'arrangements ?

On utilise la formule $A_n^p = n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - p + 1)$ lorsque l'on choisit p éléments parmi n en tenant compte de l'ordre et sans répétition.

Voir la fiche méthode : [Calculer le nombre d'arrangements](#)

4. Comment calculer un coefficient binomial ?

On applique la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Penser à utiliser la symétrie

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ pour simplifier le calcul lorsque p est grand.

Voir la fiche méthode : [Calculer un coefficient binomial](#)

5. Comment utiliser le triangle de Pascal ?

Construire le triangle ligne par ligne en plaçant des 1 aux extrémités et en additionnant les deux nombres situés au-dessus pour chaque case intérieure. Lire le coefficient souhaité à la ligne n , colonne p .

Voir la fiche méthode : [Utiliser le triangle de Pascal](#)

6. Comment choisir la bonne formule de dénombrement ?

Se poser deux questions : l'ordre compte-t-il ? La répétition est-elle possible ? La réponse oriente vers les p -uplets (n^p) , les permutations $(n!)$, les arrangements (A_n^p) ou les combinaisons $\left(\binom{n}{p}\right)$.

Voir la fiche méthode : [Choisir la bonne formule de dénombrement](#)