Suites et matrices

DURÉE ESTIMÉE

30 minutes

1 - Suites de matrices colonnes

Définition

Une **suite de matrices colonnes** est une suite (U_n) dont chaque terme U_n est une matrice colonne de taille $p \times 1$ (le nombre p de lignes ne dépend pas de n).

Lorsque $p = 2$, on note souvent $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ où (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On définit la suite (U_n) par la relation $U_{n+1} = A\,U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$U_1 = A\,U_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-1) \times 1 \\ 0 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$U_2 = A\,U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Terme général d'une suite de la forme U_{n+1} = AU_n

Soit A une matrice carrée d'ordre p et U_0 une matrice colonne à p lignes.

Si la suite (U_n) vérifie $U_{n+1} = A\,U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$U_n = A^n\,U_0.$$

Remarque

La démonstration se fait par récurrence sur n. L'initialisation utilise la convention $A^0 = I_p$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A étant diagonale, le calcul de A^n est immédiat :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = A^n \, U_0 = \begin{pmatrix} 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}.$$

2 - Suites couplées et écriture matricielle

Mise sous forme matricielle d'un système couplé

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques vérifiant le système couplé :

$$\begin{cases} u_{n+1} = a\, u_n + b\, v_n \\ v_{n+1} = c\, u_n + d\, v_n \end{cases}$$

En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le système se réécrit :

$$U_{n+1} = A\, U_n.$$

D'après la propriété précédente, on obtient alors $U_n = A^n \, U_0$.

Exemple

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2\,u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $U_{n+1} = A\,U_n$.

Alors :

$U_1 = A\,U_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $u_1 = 2$ et $v_1 = 1$.

$U_2 = A\,U_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc $u_2 = 3$ et $v_2 = 3$.

L'écriture matricielle ramène l'étude conjointe des deux suites au calcul des puissances d'une seule matrice.

3 - Suites de la forme U_{n+1} = AU_n + C

Terme général dans le cas affine

Soit A une matrice carrée d'ordre p, C une matrice colonne à p lignes, et (U_n) une suite de matrices colonnes vérifiant :

$$U_{n+1} = A\,U_n + C.$$

On suppose qu'il existe une matrice colonne L vérifiant $L = A\,L + C$ (L est appelée **point fixe** de la relation).

En posant $V_n = U_n - L$, la suite (V_n) vérifie alors $V_{n+1} = A\,V_n$, donc $V_n = A^n\,V_0$.

On en déduit l'expression du terme général :

$$U_n = A^n\,(U_0 - L) + L.$$

Remarque

Le point fixe L est solution du système matriciel $(I_p - A)\,L = C$. Il existe et est unique lorsque la matrice $I_p - A$ est inversible.

Exemple

On définit la suite (U_n) par $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = A\,U_n + C$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Recherche du point fixe $L = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant $L = A\,L + C$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{3}y + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x = 1 \\ \frac{2}{3}y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

D'où $L = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calcul du terme général. On pose $V_n = U_n - L$. Alors
$V_0 = U_0 - L = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $V_{n+1} = A\,V_n$.

La matrice A étant diagonale, $A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$, donc :

$$V_n = A^n\,V_0 = \begin{pmatrix} -2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -3\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Finalement :

$$U_n = V_n + L = \begin{pmatrix} 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 3 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

On observe en particulier que U_n converge vers L lorsque $n \to +\infty$.

4 - Chaînes de Markov à 2 ou 3 états

Définition

Une **chaîne de Markov** à p états est une suite d'expériences aléatoires dont chaque résultat appartient à un ensemble fini $\{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$ d'états, et dont l'état à l'étape $n+1$ ne dépend que de l'état à l'étape n (et non des étapes antérieures).

Matrice de transition

La **matrice de transition** P d'une chaîne de Markov à p états est la matrice carrée d'ordre p dont le coefficient p_{ij} est la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_j en une étape.

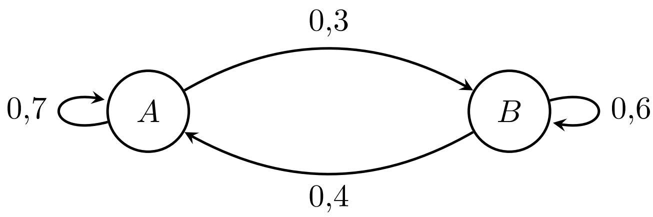
La somme des coefficients de chaque ligne de P est égale à 1.

Exemple

On modélise les déplacements quotidiens d'une personne entre deux villes A et B : chaque jour, si elle est en A, elle reste en A avec une probabilité

$0{,}7$ et part en B avec une probabilité $0{,}3$; si elle est en B, elle reste en B avec une probabilité $0{,}6$ et part en A avec une probabilité $0{,}4$.

Le graphe pondéré associé à cette chaîne de Markov est le suivant :



La matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

(la ligne i correspond à l'état de départ, la colonne j à l'état d'arrivée).

On vérifie que la somme de chaque ligne vaut bien 1.

Distribution

On appelle **distribution** (ou **état probabiliste**) à l'étape n la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} p_n^{(1)} & p_n^{(2)} & \cdots & p_n^{(p)} \end{pmatrix}$ où $p_n^{(i)}$ désigne la probabilité d'être dans l'état E_i à l'étape n.

La distribution X_0 est appelée **distribution initiale**. La somme des coefficients d'une distribution est toujours égale à 1.

Évolution d'une distribution

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov et X_n la distribution à l'étape n. Alors :

$$X_{n+1} = X_n\,P \quad \text{et donc} \quad X_n = X_0\,P^n.$$

De plus, pour tout entier $n \geqslant 0$, le coefficient (i, j) de la matrice P^n représente la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_j en exactement n étapes.

Exemple

On reprend la situation de l'exemple précédent avec $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

On suppose qu'au jour 0, la personne est en ville A : la distribution initiale est $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Distribution au jour 1.

$$X_1 = X_0\,P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Au jour 1, la personne a une probabilité $0{,}7$ d'être en A et $0{,}3$ d'être en B.

Distribution au jour 2.

$$X_2 = X_1\,P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

On calcule chaque coefficient :

$0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}49 + 0{,}12 = 0{,}61.$

$0{,}7 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}21 + 0{,}18 = 0{,}39.$

D'où $X_2 = \begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \end{pmatrix}$.

5 - Distribution invariante

Définition

Une distribution X est dite **invariante** (ou **stationnaire**) pour la matrice de transition P lorsque :

$$X\,P = X.$$

Recherche d'une distribution invariante

Pour déterminer une distribution invariante $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$, on résout le système composé :

- des équations issues de l'égalité matricielle $X\,P = X$;
- de la condition $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 1$.

Exemple

On reprend $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et on cherche une distribution invariante $X = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.

L'égalité $X\,P = X$ se traduit par :

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{cases} 0{,}7\,a + 0{,}4\,b = a \\ 0{,}3\,a + 0{,}6\,b = b \end{cases} \iff \begin{cases} -0{,}3\,a + 0{,}4\,b = 0 \\ 0{,}3\,a - 0{,}4\,b = 0 \end{cases}$$

Les deux équations sont équivalentes : on obtient $0{,}3\,a = 0{,}4\,b$, c'est-à-dire $b = \frac{3}{4}a$.

En ajoutant la condition $a + b = 1$:

$$a + \frac{3}{4}a = 1 \iff \frac{7}{4}a = 1 \iff a = \frac{4}{7}.$$

D'où $b = \frac{3}{7}$ et :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}571 & 0{,}429 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Pour de nombreuses chaînes de Markov (notamment lorsque tous les coefficients de P sont strictement positifs), la suite des distributions (X_n) converge vers une distribution invariante X, et cette limite ne dépend pas de la distribution initiale X_0.

Sur l'exemple précédent, quelle que soit la ville où démarre la personne, la probabilité d'être en A après un grand nombre de jours tend vers $\frac{4}{7}$ et celle d'être en B vers $\frac{3}{7}$.

Les questions essentielles

1. Comment calculer les premiers termes d'une suite définie par $U_{n+1} = A\,U_n$?

On part du vecteur initial U_0 et on applique le produit matriciel $U_1 = A\,U_0$, puis $U_2 = A\,U_1$, etc. Chaque coefficient de U_{n+1} s'obtient par produit ligne par colonne. Toujours réutiliser le terme précédent, pas U_0.

Voir la fiche méthode : Calculer les premiers termes d'une suite matricielle ↗

2. Comment passer d'un système couplé à une écriture matricielle ?

On range les coefficients devant u_n et v_n ligne par ligne dans une matrice A, puis on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Le système se réécrit alors $U_{n+1} = A\,U_n$, ce qui ramène l'étude des deux suites au calcul des puissances de A.

Voir la fiche méthode : Écrire un système de suites couplées sous forme matricielle ↗

3. Comment trouver le terme général d'une suite matricielle de la forme $U_{n+1} = A\,U_n + C$?

On cherche le point fixe L vérifiant $L = A\,L + C$, on pose $V_n = U_n - L$ qui vérifie $V_{n+1} = A\,V_n$, donc $V_n = A^n\,V_0$, et on conclut par $U_n = A^n\,(U_0 - L) + L$.

Voir la fiche méthode : Déterminer le terme général d'une suite U(n+1) = AU(n) + C ↗

4. Comment construire la matrice de transition d'une chaîne de Markov ?

On fixe l'ordre des états, puis on lit pour chaque état de départ E_i la probabilité p_{ij} de passer à l'état E_j : ce coefficient se place ligne i, colonne j. La somme de chaque ligne doit valoir 1.

Voir la fiche méthode : Construire la matrice de transition d'une chaîne de Markov ↗

5. Comment calculer la distribution à l'étape n ?

Pour un n petit, on itère $X_{n+1} = X_n\,P$ à partir de la distribution initiale X_0. Pour un n quelconque, on utilise $X_n = X_0\,P^n$ après avoir calculé P^n.

Voir la fiche méthode : Calculer la distribution à l'étape n d'une chaîne de Markov ↗

6. Comment déterminer la distribution invariante d'une chaîne de Markov ?

On résout le système matriciel $XP = X$ (qui fournit des équations linéaires entre les coefficients de X), auquel on ajoute la condition de normalisation $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 1$ pour assurer l'unicité de la solution.

Voir la fiche méthode : Déterminer la distribution invariante d'une chaîne de Markov ↗