

Nombres complexes et géométrie

DURÉE ESTIMÉE

30 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Ensemble de points dont l'affixe vérifie une condition

Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle

Utiliser la forme exponentielle pour calculer

Déterminer la nature d'un triangle avec les nombres complexes

Démontrer un alignement ou une orthogonalité avec les nombres complexes

Calculer une longueur ou un angle avec les nombres complexes

1. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$

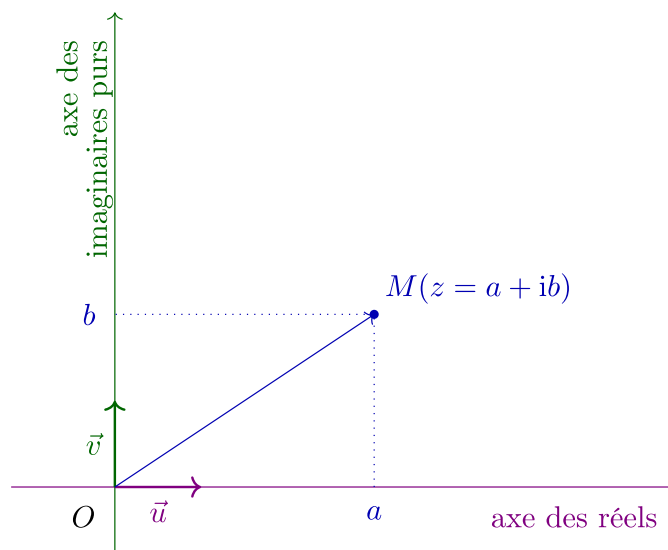
Définition

A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point M de coordonnées $(a; b)$

On dit que M est l'**image** de z et que z est l'**affixe** du point M .

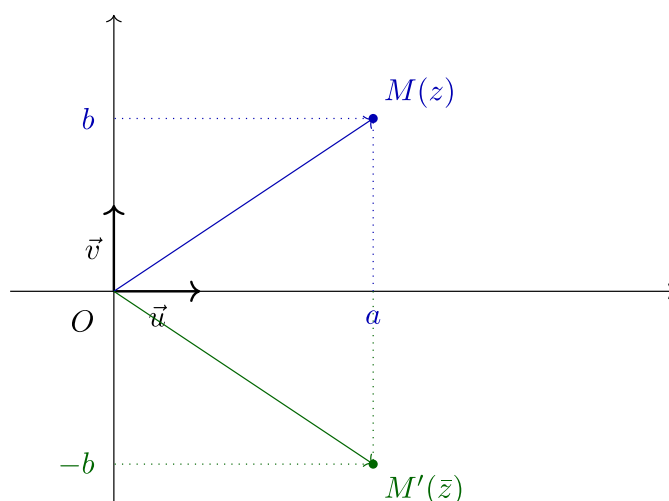
A tout vecteur $\vec{k}$ de coordonnées $(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + ib$.

On dit que z est l'**affixe** du vecteur $\vec{k}$.



Propriété

- M appartient à l'axe des abscisses si et seulement si son affixe z est un nombre réel
- M appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son affixe z est un nombre imaginaire pur
- Deux nombres complexes conjugués ont des affixes symétriques par rapport à l'axe des abscisses



Propriété

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B .

- l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

- l'affixe du milieu M du segment $[AB]$ est égale à :

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Propriété

Soient $\vec{w}(z)$ et $\vec{w}'(z')$ deux vecteurs du plan et k un nombre réel.

- Le vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$;
- Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz .

2. Forme trigonométrique

Définition

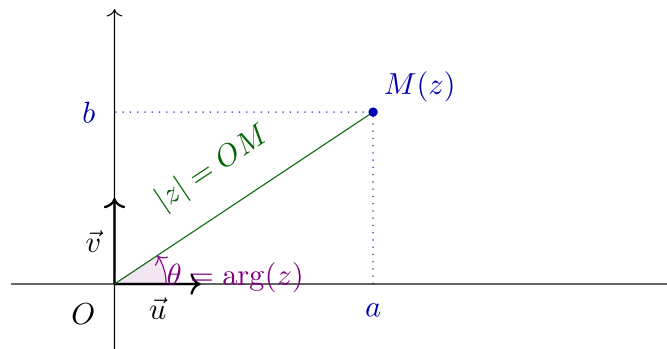
Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle module de z , et on note $|z|$ le nombre **réel** positif ou nul

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ une mesure, exprimée en radians, de l'angle

$$(\vec{u}; \overrightarrow{OM}).$$



Propriétés des modules

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $|z|^2 = z \times \bar{z}$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ pour $z' \neq 0$

Propriétés des arguments

Pour tous nombres complexes z et z' **non nuls** et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Remarque

En particulier :

- $\arg(-z) = \arg(z) + \arg(-1) = \arg(z) + \pi$

- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) - \arg(z) = -\arg(z).$

Théorème et définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ :

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** du nombre z .

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \arg(z)$ est défini par :

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemple

Soit $z = \sqrt{3} + i$.

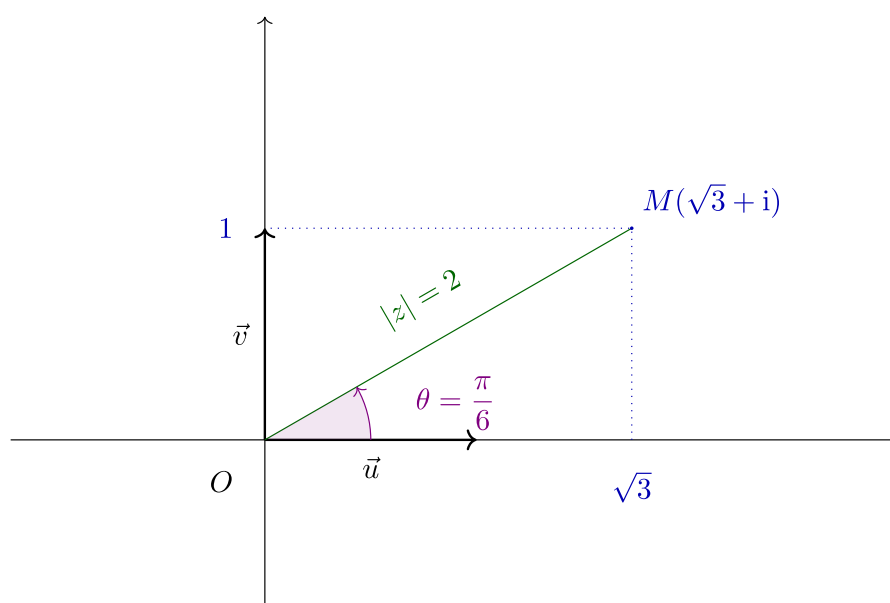
$$|z| = \sqrt{3 + 1} = 2$$

Si θ est un argument de z :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

La forme trigonométrique de z est donc :

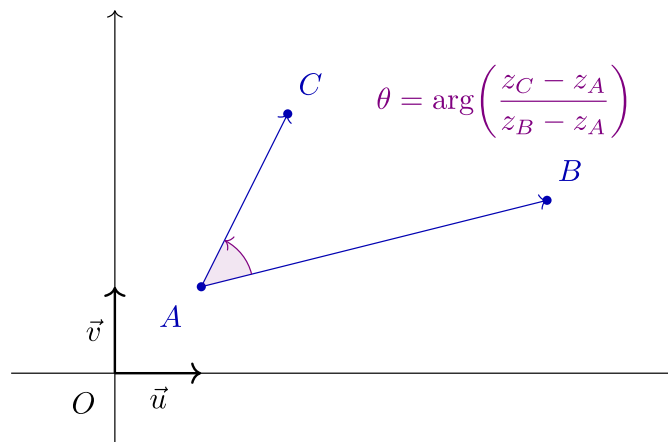
$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$



🛡 Angle de vecteurs et arguments

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C avec $A \neq B$ et $A \neq C$:

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right).$$



i Remarque

- Notez bien l'**ordre des affixes** (inverse de l'ordre des points dans l'écriture de l'angle).
- **Premier cas particulier important :**

A, B et C sont alignés

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = 0 \text{ ou } \pi \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

- **Second cas particulier important :**

$\widehat{BAC}$ est un angle droit

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est un imaginaire pur.}$$

3. Forme exponentielle

Notation

Si z est un nombre complexe de module r et d'argument θ , la notation exponentielle du nombre z est :

$$z = re^{i\theta}$$

Remarque

Ce sont les propriétés des arguments :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

similaires aux propriétés de l'exponentielle qui justifient cette notation.

Exemple

Le nombre -1 a pour module 1 et pour argument $\pi \pmod{2\pi}$. On peut donc écrire :

$$-1 = e^{i\pi} \text{ ou encore } e^{i\pi} + 1 = 0.$$

C'est la célèbre identité d'Euler qui relie 0 , 1 , e , i et π .

Les propriétés des arguments vues précédemment s'écrivent alors :

Propriété

Pour tous réels θ et θ' :

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

4. Le cercle unité, formules d'Euler et de Moivre

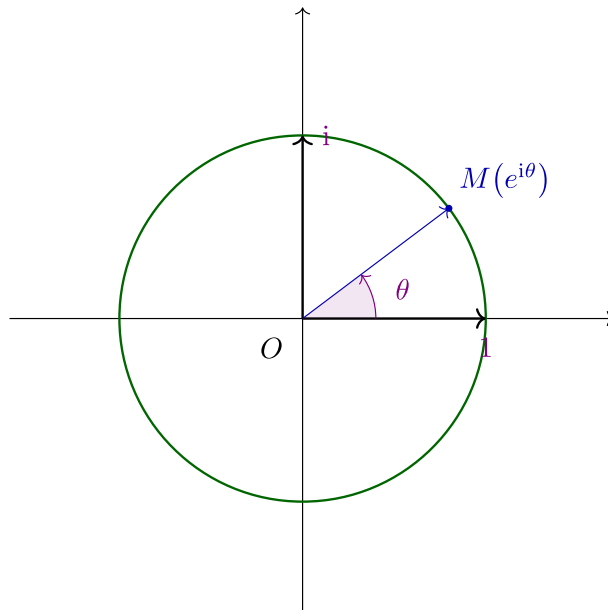
Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de **module 1** :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$$

Les images des éléments de $\mathbb{U}$ sont exactement les points du **cercle de centre O et de rayon 1**, appelé **cercle unité**.

Tout élément de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme $z = e^{i\theta}$, où θ est un argument de z .



🛡 Stabilité de $\mathbb{U}$

L'ensemble $\mathbb{U}$ contient 1 et est **stable** pour le produit, le passage à l'inverse et la conjugaison. Pour tous z et z' de $\mathbb{U}$:

- $zz' \in \mathbb{U}$, car $|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$;
- $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$; de plus $\frac{1}{z} = \bar{z}$, car $z\bar{z} = |z|^2 = 1$;
- $\bar{z} \in \mathbb{U}$, car $|\bar{z}| = |z| = 1$.

❗ Remarque

La propriété $\frac{1}{z} = \bar{z}$ est très utile : sur le cercle unité, **prendre l'inverse**

revient à conjuguer. En écriture exponentielle, cela se lit $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

Formules d'Euler

Pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

On en déduit, pour tout réel θ :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple

Les formules d'Euler permettent de **linéariser** (transformer une puissance en somme). Linéarisons $\cos^2 \theta$:

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4}$$

Or $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2 \cos(2\theta)$, donc :

$$\cos^2 \theta = \frac{2 \cos(2\theta) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos (n\theta) + i \sin (n\theta)$$

C'est la traduction de l'égalité $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Exemple

Calculons $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^6$.

D'après la formule de Moivre, avec $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $n = 6$:

$$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^6 = \cos \left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Remarque

Les formules d'Euler sont au cœur des techniques de linéarisation et la formule de Moivre permet d'exprimer $\cos (n\theta)$ et $\sin (n\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

1. Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ?

On calcule le module $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis on cherche un argument θ tel que $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe](#)

2. Comment passer entre forme algébrique et forme exponentielle ?

On utilise $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Pour le retour, on développe avec $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$.

Voir la fiche méthode : [Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle](#)

3. Comment calculer un produit, un quotient ou une puissance de nombres complexes ?

La forme exponentielle rend ces calculs très simples :

$$(re^{i\theta}) (r'e^{i\theta'}) = rr' e^{i(\theta+\theta')} \text{ et } (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \text{ (formule de}$$

Moivre).

Voir la fiche méthode : [Utiliser la forme exponentielle pour calculer](#)

4. Comment calculer une longueur ou un angle avec les nombres complexes ?

La longueur AB vaut $|z_B - z_A|$. L'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est l'argument du quotient $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

Voir la fiche méthode : [Calculer une longueur ou un angle avec les nombres complexes](#)

5. Comment démontrer qu'un triangle est isocèle, rectangle ou équilatéral ?

On forme le quotient $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et on lit la nature du triangle sur son module ($|Z| = 1$ pour isocèle en A) et son argument ($\pm \frac{\pi}{2}$ rectangle, $\pm \frac{\pi}{3}$ équilatéral).

Voir la fiche méthode : [Déterminer la nature d'un triangle avec les nombres complexes](#)

6. Comment démontrer que trois points sont alignés ou que deux droites sont perpendiculaires ?

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un nombre réel. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le quotient correspondant est un imaginaire pur.

Voir la fiche méthode : [Démontrer un alignement ou une orthogonalité avec les nombres complexes](#)

7. Comment déterminer un ensemble de points dont l'affixe vérifie une condition ?

On dispose de deux méthodes : la méthode algébrique (poser $z = x + iy$ et identifier [l'équation cartésienne](#)) et la méthode géométrique (interpréter $|z - a|$ comme une distance).

Voir la fiche méthode : [Ensemble de points dont l'affixe vérifie une condition](#)