NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

COURS

Nombres complexes et géométrie

DURÉE ESTIMÉE

30 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Ensemble de points dont l'affixe vérifie une condition
- Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe
- Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle
- Utiliser la forme exponentielle pour calculer
- Déterminer la nature d'un triangle avec les nombres complexes
- Démontrer un alignement ou une orthogonalité avec les nombres complexes
- Calculer une longueur ou un angle avec les nombres complexes

1. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$

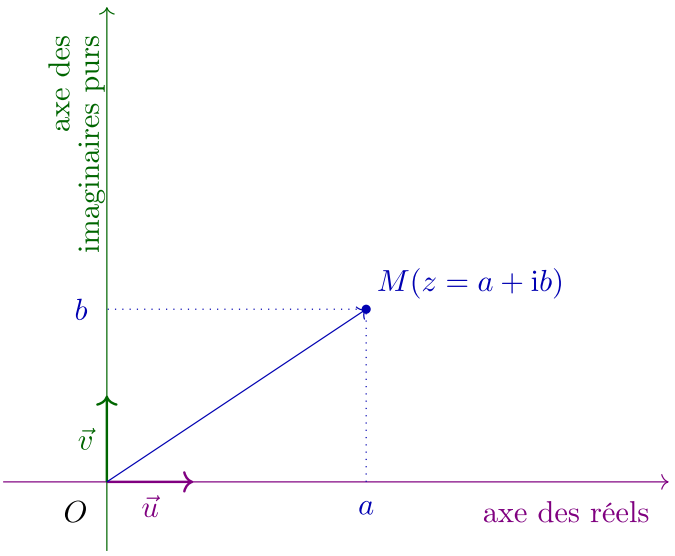
Définition

A tout nombre complexe $z=a+ib$, on associe le point M de coordonnées $(a;b)$

On dit que M est l'**image** de z et que z est l'**affixe** du point M.

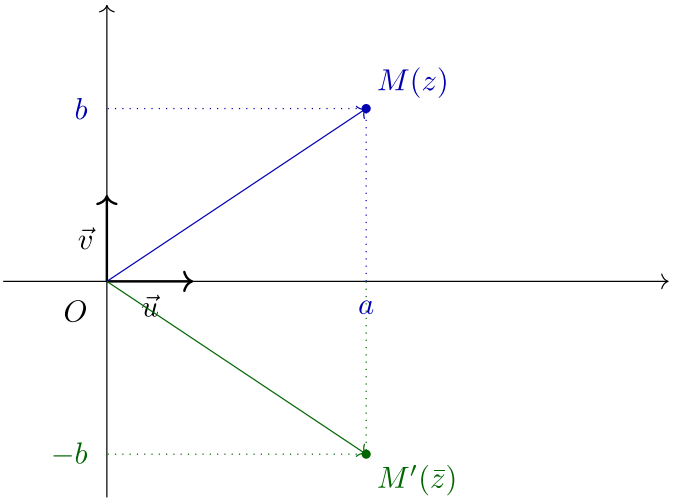
A tout vecteur $\vec{k}$ de coordonnées $(a;b)$ on associe le nombre complexe $z=a+ib$.

On dit que z est l'**affixe** du vecteur $\vec{k}$.



Propriété

- M appartient à l'axe des abscisses si et seulement si son affixe z est un nombre réel
- M appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son affixe z est un nombre imaginaire pur
- Deux nombres complexes conjugués ont des affixes symétriques par rapport à l'axe des abscisses



Propriété

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.

- l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

- l'affixe du milieu M du segment $[AB]$ est égale à :

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Propriété

Soient $\vec{w}\,(z)$ et $\overrightarrow{w'}\,(z')$ deux vecteurs du plan et k un nombre réel.

- Le vecteur $\vec{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$;
- Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz.

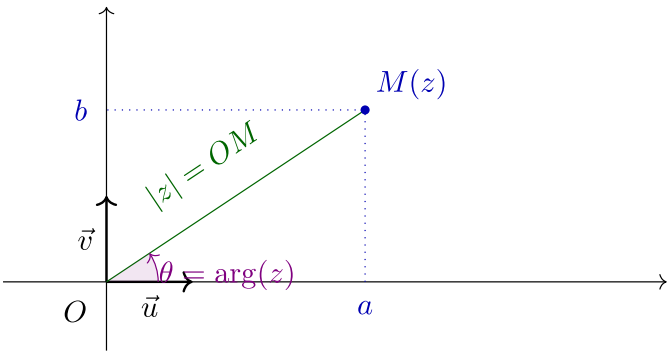
2. Forme trigonométrique

Définition

Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle module de z, et on note $|z|$ le nombre **réel** positif ou nul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ une mesure, exprimée en radians, de l'angle $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right)$.



Propriétés des modules

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $|z|^2 = z \times \overline{z}$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ pour $z' \neq 0$

Propriétés des arguments

Pour tous nombres complexes z et z' **non nuls** et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

- $\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg\left(z\right)$
- $\arg\left(zz'\right) = \arg\left(z\right) + \arg\left(z'\right)$
- $\arg\left(z^n\right) = n \times \arg\left(z\right)$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg\left(z\right) - \arg\left(z'\right)$

Remarque

En particulier :

- $\arg\left(-z\right) = \arg\left(z\right) + \arg\left(-1\right) = \arg\left(z\right) + \pi$

- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = \arg(1) - \arg(z) = -\arg(z)$.

Théorème et définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** du nombre z.

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \arg(z)$ est défini par :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exemple

Soit $z = \sqrt{3} + i$.

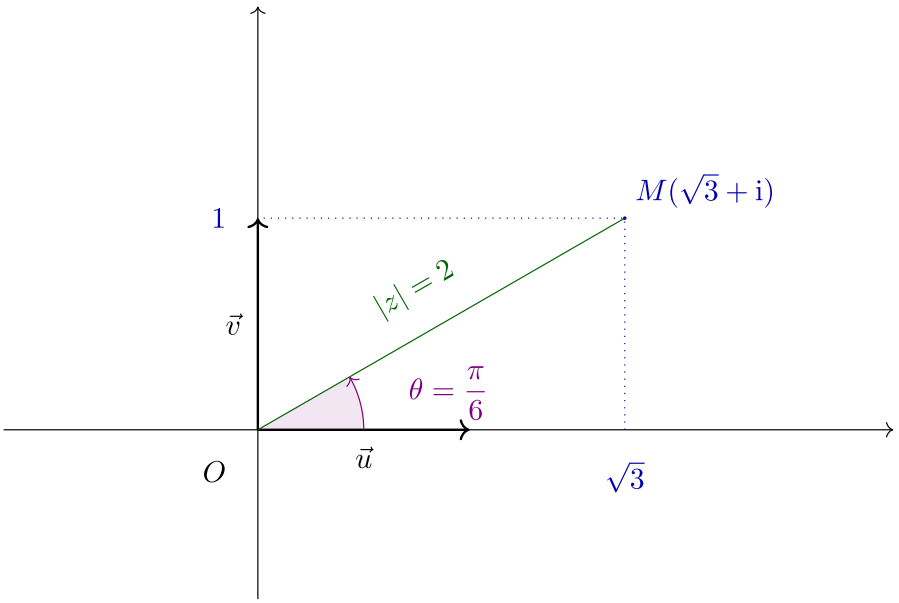
$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

Si θ est un argument de z :

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}\ (\text{mod. } 2\pi)$

La forme trigonométrique de z est donc :

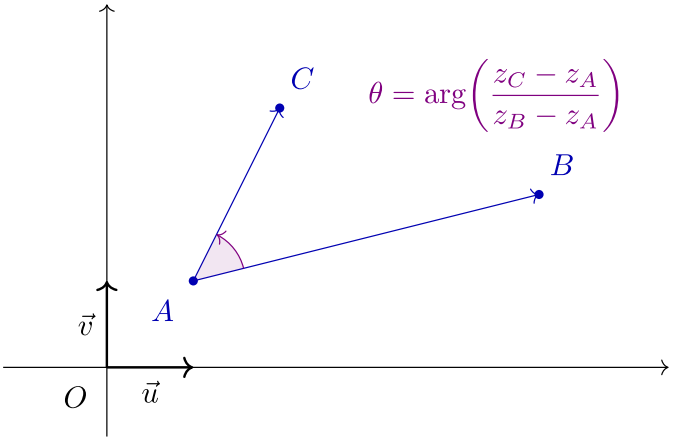
$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.



Angle de vecteurs et arguments

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A,z_B, z_C avec $A \neq B$ et $A \neq C$:

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right).$$



Remarque

- Notez bien l'**ordre des affixes** (inverse de l'ordre des points dans l'écriture de l'angle).

- **Premier cas particulier important :**

  A, B et C sont alignés

  $$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \text{ ou } \pi \ [\text{mod. } 2\pi]$$

  $$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

- **Second cas particulier important :**

  $\widehat{BAC}$ est un angle droit

  $$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \ [\text{mod. } 2\pi]$$

  $$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$ est un **imaginaire pur**.

3. Forme exponentielle

Notation

Si z est un nombre complexe de module r et d'argument θ, la notation exponentielle du nombre z est :

$$z = re^{i\theta}$$

Remarque

Ce sont les propriétés des arguments :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

similaires aux propriétés de l'exponentielle qui justifient cette notation.

Exemple

Le nombre -1 a pour module 1 et pour argument $\pi \ (\text{mod. } 2\pi)$. On peut donc écrire :

$-1 = e^{i\pi}$ ou encore $e^{i\pi} + 1 = 0$.

C'est la célèbre identité d'Euler qui relie 0, 1, e, i et π.

Les propriétés des arguments vues précédemment s'écrivent alors :

Propriété

Pour tous réels θ et θ' :

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i\left(\theta+\theta'\right)}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\left(\theta-\theta'\right)}$.

4. Le cercle unité, formules d'Euler et de Moivre

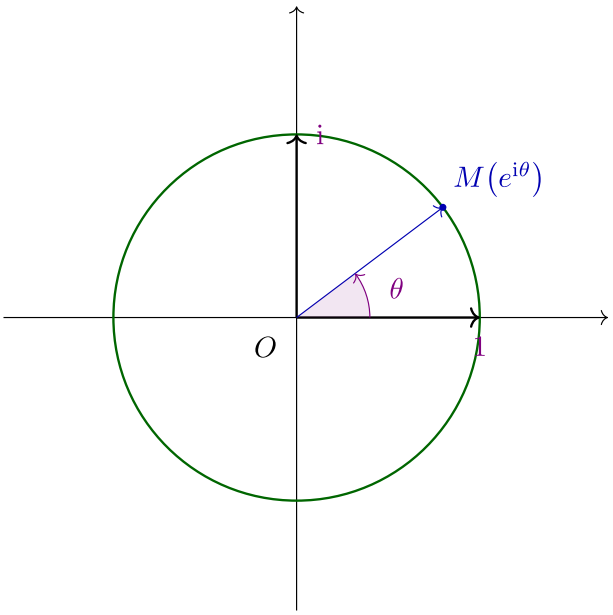
Ensemble U des nombres complexes de module 1

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de **module** 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = 1\}$$

Les images des éléments de $\mathbb{U}$ sont exactement les points du **cercle de centre** O **et de rayon** 1, appelé **cercle unité**.

Tout élément de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme $z = e^{i\theta}$, où θ est un argument de z.



Stabilité de U

L'ensemble $\mathbb{U}$ contient 1 et est **stable** pour le produit, le passage à l'inverse et la conjugaison. Pour tous z et z' de $\mathbb{U}$:

- $zz' \in \mathbb{U}$, car $|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$;
- $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$; de plus $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$, car $z\overline{z} = |z|^2 = 1$;
- $\overline{z} \in \mathbb{U}$, car $|\overline{z}| = |z| = 1$.

Remarque

La propriété $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ est très utile : sur le cercle unité, **prendre l'inverse revient à conjuguer**. En écriture exponentielle, cela se lit $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

Formules d'Euler

Pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

On en déduit, pour tout réel θ :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple

Les formules d'Euler permettent de **linéariser** (transformer une puissance en somme). Linéarisons $\cos^2\theta$:

$$\cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4}$$

Or $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2\cos(2\theta)$, donc :

$$\cos^2\theta = \frac{2\cos(2\theta) + 2}{4} = \frac{\mathbf{1} + \cos(\mathbf{2}\theta)}{\mathbf{2}}.$$

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

C'est la traduction de l'égalité $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Exemple

Calculons $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$.

D'après la formule de Moivre, avec $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $n = 6$:

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6 = \cos\left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = \mathbf{-1}.$$

Remarque

Les formules d'Euler sont au cœur des techniques de linéarisation et la formule de Moivre permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Les questions essentielles

1. Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ?

On calcule le module $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis on cherche un argument θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

Voir la fiche méthode : Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe

2. Comment passer entre forme algébrique et forme exponentielle ?

On utilise $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Pour le retour, on développe avec $z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$.

Voir la fiche méthode : Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle

3. Comment calculer un produit, un quotient ou une puissance de nombres complexes ?

La forme exponentielle rend ces calculs très simples : $\left(re^{i\theta}\right)\left(r'e^{i\theta'}\right) = rr'\,e^{i(\theta+\theta')}$ et $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n\,e^{in\theta}$ (formule de Moivre).

Voir la fiche méthode : Utiliser la forme exponentielle pour calculer

4. Comment calculer une longueur ou un angle avec les nombres complexes ?

La longueur AB vaut $|z_B - z_A|$. L'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ est l'argument du quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

Voir la fiche méthode : Calculer une longueur ou un angle avec les nombres complexes

5. Comment démontrer qu'un triangle est isocèle, rectangle ou équilatéral ?

On forme le quotient $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et on lit la nature du triangle sur son module ($|Z| = 1$ pour isocèle en A) et son argument ($\pm\dfrac{\pi}{2}$ rectangle, $\pm\dfrac{\pi}{3}$ équilatéral).

Voir la fiche méthode : Déterminer la nature d'un triangle avec les nombres complexes

6. Comment démontrer que trois points sont alignés ou que deux droites sont perpendiculaires ?

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un nombre réel. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le quotient correspondant est un imaginaire pur.

Voir la fiche méthode : Démontrer un alignement ou une orthogonalité avec les nombres complexes

7. Comment déterminer un ensemble de points dont l'affixe vérifie une condition ?

On dispose de deux méthodes : la méthode algébrique (poser $z = x + iy$ et identifier l'équation cartésienne) et la méthode géométrique (interpréter $|z - a|$ comme une distance).

Voir la fiche méthode : Ensemble de points dont l'affixe vérifie une condition