

Nombres complexes et algèbre

DURÉE ESTIMÉE

45 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Mettre un nombre complexe sous forme algébrique

Calculer et utiliser le conjugué d'un nombre complexe

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Calculer le module et un argument d'un nombre complexe

Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ou exponentielle

Effectuer des calculs avec la forme exponentielle

Linéariser une expression trigonométrique avec les formules d'Euler

1. Ensemble des nombres complexes

Théorème et Définition

On admet qu'il existe un ensemble de nombres (appelés **nombres complexes**), noté $\mathbb{C}$ tel que:

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$
- Chaque élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit **de manière unique** sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.

Exemple

$\sqrt{5} + \frac{1}{2}i$, $3i$ et $\sqrt{2}$ sont des nombres complexes ($\sqrt{2}$ est un nombre réel mais comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ c'est aussi un nombre complexe !)

Remarque

Attention : On définit une addition et une multiplication sur $\mathbb{C}$ mais on ne définit **pas** de relation d'ordre (comme $\leq$). En effet il n'est pas possible de définir une telle relation qui soit compatible avec celle définie sur $\mathbb{R}$ et possède les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$.

Dans les exercices, attention donc à ne pas écrire de choses comme $z < z'$, si z et z' sont des nombres complexes non réels !

Définition

- L'écriture $z = a + ib$ est appelée la **forme algébrique** du nombre complexe z .
- Le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** du nombre complexe z .
- Le nombre réel b s'appelle la **partie imaginaire** du nombre complexe z .
- Si la partie réelle de z est nulle (c'est à dire $a = 0$ et $z = bi$), on dit que z est un **imaginaire pur**.

Propriété

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Remarque

- Cela résulte immédiatement du fait que chaque élément de $\mathbb{C}$ s'écrit **de manière unique** sous la forme $z = a + ib$.

- En particulier, un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelles et imaginaires sont nulles.

Formule du binôme dans $\mathbb{C}$

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel n :

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial « k parmi n ».

Démonstration

La formule du binôme est déjà connue dans $\mathbb{R}$. Sa démonstration (par récurrence sur n , à l'aide de la relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$) n'utilise que l'addition et la multiplication, ainsi que le fait que ces deux opérations sont **associatives, distributives et commutatives**.

Or la multiplication dans $\mathbb{C}$ suit exactement les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$: en particulier elle est **commutative** ($z \times z' = z' \times z$). C'est ce qui autorise à factoriser les termes $z^k z'^{n-k}$ comme dans le cas réel.

La même démonstration s'applique donc mot pour mot avec des nombres complexes, et la formule reste valable dans $\mathbb{C}$.

Exemple

Développons $(1 + i)^4$ en appliquant la formule du binôme avec $z = 1$, $z' = i$ et $n = 4$. Les coefficients binomiaux sont $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$ et $\binom{4}{4} = 1$:

$$(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4$$

On remplace alors $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$:

$$(1 + i)^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1$$

En regroupant les parties réelles et imaginaires :

$$(1 + i)^4 = (1 - 6 + 1) + (4 - 4)i = -4.$$

2. Conjugué

Définition

Soit z le nombre complexe $z = a + ib$. On appelle **conjugué** de z , le nombre complexe

$$\bar{z} = a - ib$$

Exemple

Soit $z = 3 + 4i$

Le conjugué de z est $\bar{z} = 3 - 4i$.

Propriétés des conjugués

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel n :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ pour $z' \neq 0$
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

Remarque

- Par contre, en général, $|z + z'|$ n'est pas égal à $|z| + |z'|$. On peut juste montrer que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire) ;
- **ROC** : La démonstration de certaines de ces propriétés a été demandée au Bac 2014.

Inverse d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe **non nul**. Son inverse s'écrit :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

Démonstration

Comme $z \neq 0$, on a $z\bar{z} = |z|^2 \neq 0$. En multipliant le numérateur et le dénominateur de $\frac{1}{z}$ par $\bar{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Le dénominateur $|z|^2 = a^2 + b^2$ étant un réel, on obtient directement la forme algébrique de l'inverse. C'est la même technique que pour mettre un quotient sous forme algébrique : multiplier par le conjugué du dénominateur.

Exemple

Soit $z = 3 + 4i$. Alors $|z|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ et $\bar{z} = 3 - 4i$, donc :

$$\frac{1}{z} = \frac{3 - 4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

3. Équation du second degré à coefficients réels

Équation linéaire $az = b$

Soient a et b deux nombres complexes avec $a \neq 0$. L'équation $az = b$ admet une unique solution dans $\mathbb{C}$:

$$z = \frac{b}{a} = \frac{b\bar{a}}{|a|^2}$$

On obtient la forme algébrique de z en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\bar{a}$.

Propriété

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet toujours au moins une solution.

Plus précisément, si on note Δ son discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$) :

- Si $\Delta > 0$, l'équation possède **deux solutions réelles** :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation possède **une solution réelle** :

$$z = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation possède **deux solutions complexes conjuguées** l'une de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple

Soit à résoudre l'équation $z^2 + 2z + 2 = 0$ dans $\mathbb{C}$

$$\Delta = 4 - 8 = -4$$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{4}}{2} = -1 - i \text{ et } z_2 = \frac{-2 + i\sqrt{4}}{2} = -1 + i.$$

Somme et produit des racines (relations de Viète)

Lorsque l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a \neq 0$) admet deux racines z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$ (distinctes ou confondues), leur **somme** et leur **produit** valent :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Remarque

Ces relations résultent de la factorisation

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$: en développant et en identifiant les coefficients, on retrouve $b = -a(z_1 + z_2)$ et $c = a z_1 z_2$.

Elles sont utiles pour **vérifier** des racines trouvées, ou pour **déterminer la seconde racine** quand on en connaît déjà une.

4. Représentation géométrique

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$

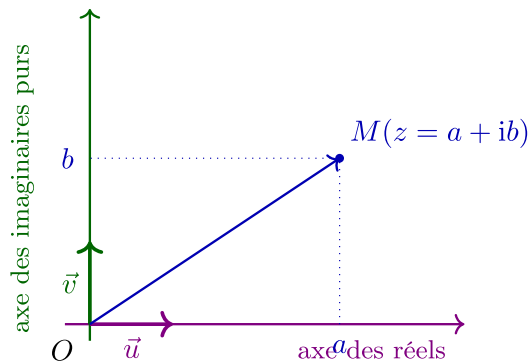
Définition

A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point M de coordonnées $(a; b)$

On dit que M est l'**image** de z et que z est l'**affixe** du point M .

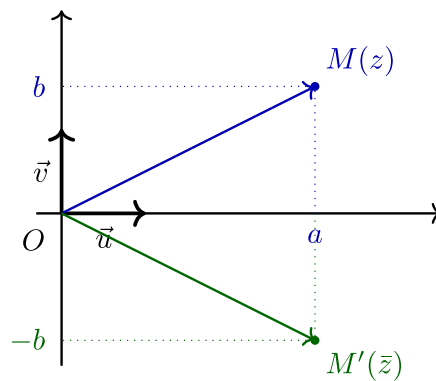
A tout vecteur $\vec{k}$ de coordonnées $(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + ib$.

On dit que z est l'**affixe** du vecteur $\vec{k}$.



Propriété

- M appartient à l'axe des abscisses si et seulement si son affixe z est un nombre réel
- M appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son affixe z est un nombre imaginaire pur
- Deux nombres complexes conjugués ont des affixes symétriques par rapport à l'axe des abscisses



Propriété

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B .

- l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

- l'affixe du milieu M du segment $[AB]$ est égale à :

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Propriété

Soient $\vec{w}(z)$ et $\vec{w'}(z')$ deux vecteurs du plan et k un nombre réel.

- Le vecteur $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe $z + z'$;
- Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz .

5. Forme trigonométrique

Définition

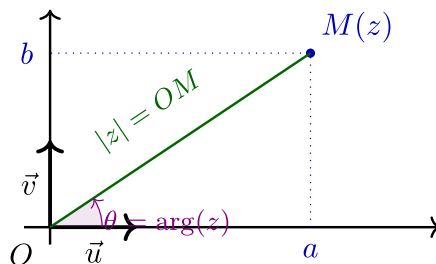
Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle module de z , et on note $|z|$ le nombre **réel** positif ou nul

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ une mesure, exprimée en radians, de l'angle

$$(\vec{u}; \overrightarrow{OM}).$$



Propriétés des modules

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $|z|^2 = z \times \bar{z}$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ pour $z' \neq 0$

Ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de **module 1** :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Géométriquement, $\mathbb{U}$ est l'ensemble des points images situés sur le **cercle de centre O et de rayon 1** (le cercle trigonométrique).

Stabilité de $\mathbb{U}$

L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit et par passage à l'inverse : si z et z' appartiennent à $\mathbb{U}$, alors :

- $zz' \in \mathbb{U}$ car $|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$;
- $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ car $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = 1$ (et $z \neq 0$ puisque $|z| = 1$) ;
- $\bar{z} \in \mathbb{U}$ car $|\bar{z}| = |z| = 1$.

En particulier, on verra (forme exponentielle, §6) que tout élément de $\mathbb{U}$ s'écrit $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Propriétés des arguments

Pour tous nombres complexes z et z' **non nuls** et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Remarque

En particulier :

- $\arg(-z) = \arg(z) + \arg(-1) = \arg(z) + \pi$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) - \arg(z) = -\arg(z).$

Théorème et définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ :

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** du nombre z .

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \arg(z)$ est défini par :

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemple

Soit $z = \sqrt{3} + i$.

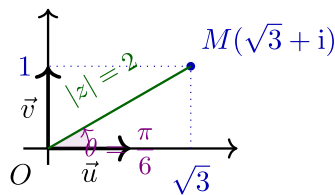
$$|z| = \sqrt{3+1} = 2$$

Si θ est un argument de z :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

La forme trigonométrique de z est donc :

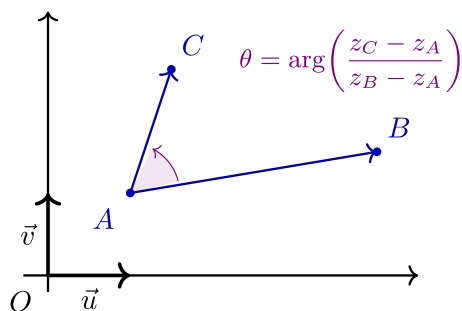
$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$



🛡 Angle de vecteurs et arguments

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C avec $A \neq B$ et $A \neq C$:

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right).$$



i Remarque

- Notez bien l'**ordre des affixes** (inverse de l'ordre des points dans l'écriture de l'angle).
- **Premier cas particulier important :**

A, B et C sont alignés

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = 0 \text{ ou } \pi \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

- **Second cas particulier important :**

$\widehat{BAC}$ est un angle droit

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est un imaginaire pur.}$$

6. Forme exponentielle

Notation

Si z est un nombre complexe de module r et d'argument θ , la notation exponentielle du nombre z est :

$$z = re^{i\theta}$$

Remarque

Ce sont les propriétés des arguments :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

similaires aux propriétés de l'exponentielle qui justifient cette notation.

Exemple

Le nombre -1 a pour module 1 et pour argument $\pi \pmod{2\pi}$. On peut donc écrire :

$$-1 = e^{i\pi} \text{ ou encore } e^{i\pi} + 1 = 0.$$

C'est la célèbre identité d'Euler qui relie 0 , 1 , e , i et π .

Les propriétés des arguments vues précédemment s'écrivent alors :

Propriété

Pour tous réels θ et θ' :

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Relation fonctionnelle et formules d'addition

La première égalité, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$, est la **relation fonctionnelle** de l'exponentielle imaginaire. En l'écrivant avec la forme trigonométrique, on retrouve les **formules d'addition** :

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \theta') &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \\ \sin(\theta + \theta') &= \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'\end{aligned}$$

Démonstration des formules d'addition

On développe le produit $e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$ en remplaçant chaque facteur par sa forme trigonométrique :

$$(\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$$= (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i (\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')$$

Ce produit est égal à $e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les deux formules d'addition.

En prenant $\theta' = \theta$, on en déduit les **formules de duplication**

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \text{ et } \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

7. Formule de Moivre et formules d'Euler



Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$



Remarque

Cette formule s'obtient directement à partir de la forme exponentielle :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$



Exemple

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $n = 4$:

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^4 = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Formules d'Euler

Pour tout réel θ :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Remarque

Ces formules s'obtiennent en additionnant et en soustrayant les égalités $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$.

Elles permettent notamment de **linéariser** des polynômes trigonométriques (transformer un produit de cosinus et sinus en somme).

Linéarisation de $\cos^2 \theta$

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta).$$

8. Racines n-ièmes de l'unité

Racines n-ièmes de l'unité

Soit n un entier naturel non nul. On appelle **racines n -ièmes de l'unité** les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ leur ensemble.

Description de $\mathbb{U}_n$

L'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions, qui sont les nombres complexes :

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Démonstration

On cherche z sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ (toute solution est non nulle car $0^n = 0 \neq 1$). Alors :

$$z^n = r^n e^{in\theta} = 1 = 1 \times e^{i \times 0}$$

Par identification du module et de l'argument, $r^n = 1$ donc $r = 1$ (car $r > 0$), et $n\theta = 0 \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

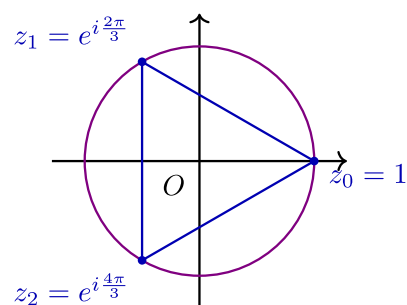
Les valeurs $k = 0, 1, \dots, n - 1$ donnent n arguments distincts ; au-delà, on retrouve les mêmes nombres modulo 2π . Il y a donc exactement n solutions.

💡 Cas $n = 2, 3$ et 4

- $n = 2 : z^2 = 1$ a pour solutions 1 et -1 .
- $n = 3 : z^3 = 1$ a pour solutions $1, e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- $n = 4 : z^4 = 1$ a pour solutions $1, i, -1$ et $-i$.

📌 Remarque

Les images des racines n -ièmes de l'unité sont les sommets d'un **polygone régulier à n côtés** inscrit dans le cercle trigonométrique, l'un des sommets étant le point d'abscisse 1 . Pour $n = 3$, on obtient un triangle équilatéral.



Somme des racines n -ièmes de l'unité

Pour $n \geq 2$, la somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{2k\pi}{n}} = 0$$

Démonstration

En posant $\omega = e^{i \frac{2\pi}{n}}$, les racines sont $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$: c'est une somme géométrique de raison $\omega \neq 1$. Comme $\omega^n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \frac{1 - 1}{\omega - 1} = 0$$

9. Équations polynomiales

Factorisation de $z^n - a^n$

Pour tout nombre complexe a et tout entier $n \geq 1$:

$$z^n - a^n = (z - a) (z^{n-1} + a z^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots + a^{n-1})$$

En particulier $z = a$ est racine de $z^n - a^n$.

Démonstration

Il suffit de développer le membre de droite : tous les termes se simplifient deux à deux par télescopage, et il ne reste que $z^n - a^n$. On peut aussi

reconnaître la somme géométrique $\sum_{j=0}^{n-1} a^j z^{n-1-j}$ multipliée par $(z - a)$.

Factorisation par $(z - a)$ et nombre de racines

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes.

- Si a est une racine de P (c'est-à-dire $P(a) = 0$), alors P se factorise par $(z - a)$: il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(z) = (z - a) Q(z)$.
- Un polynôme de degré n admet **au plus n racines** dans $\mathbb{C}$.

Démonstration

Si $P(a) = 0$, on écrit $P(z) = P(z) - P(a)$. Or chaque monôme $c_k z^k$ donne $c_k (z^k - a^k)$, factorisable par $(z - a)$ d'après la propriété précédente. En sommant, $P(z) = (z - a) Q(z)$ avec $\deg Q = n - 1$.

Le nombre de racines s'en déduit : chaque racine fait baisser le degré du facteur restant d'au moins 1, on ne peut donc factoriser au plus que n fois.

Équation de degré 3 à coefficients réels, une racine connue

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ (coefficients réels) dont on connaît une racine z_0 :

1. Factoriser le polynôme par $(z - z_0)$:

$$az^3 + bz^2 + cz + d = (z - z_0)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma).$$

2. Déterminer α, β, γ par identification des coefficients (ou par division).
3. Résoudre l'équation du second degré $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$.
4. Réunir toutes les racines.

Exemple

Résoudre $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$, sachant que $z_0 = 1$ est une racine évidente ($1 - 3 + 4 - 2 = 0$).

On factorise par $(z - 1)$: $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z - 1)(z^2 - 2z + 2)$
(identification : le coefficient dominant est 1, le terme constant $-1 \times 2 = -2$).

On résout $z^2 - 2z + 2 = 0$: $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, d'où

$$z = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1; 1 - i; 1 + i\}$.

Les questions essentielles

1. Comment mettre un nombre complexe sous forme algébrique ?

Effectuer les calculs en remplaçant i^2 par -1 ; pour un quotient, multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur afin d'obtenir un dénominateur réel.

Voir la fiche méthode : [Mettre un nombre complexe sous forme algébrique](#)

2. Comment calculer le conjugué et l'utiliser ?

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$. Il sert notamment à démontrer qu'un complexe est réel ($z = \bar{z}$) ou imaginaire pur ($z = -\bar{z}$).

Voir la fiche méthode : [Calculer et utiliser le conjugué d'un nombre complexe](#)

3. Comment résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$?

Calculer le [discriminant](#) $\Delta = b^2 - 4ac$; si $\Delta < 0$, l'équation admet

deux racines complexes conjuguées $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Voir la fiche méthode : [Résoudre une équation du second degré dans \$\mathbb{C}\$](#)

4. Comment calculer le module et un argument ?

Le module est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. L'argument θ vérifie $\cos \theta = a/|z|$ et $\sin \theta = b/|z|$; les deux valeurs identifient un angle remarquable unique modulo 2π .

Voir la fiche méthode : [Calculer le module et un argument d'un nombre complexe](#)

5. Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ou exponentielle ?

Calculer le module r , factoriser z par r pour faire apparaître $\cos \theta + i \sin \theta$, puis identifier l'angle θ .

Voir la fiche méthode : [Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ou exponentielle](#)

6. Comment calculer un produit, un quotient ou une puissance avec la forme exponentielle ?

Sur la forme $re^{i\theta}$: produit = produit des modules et somme des arguments ; quotient = quotient des modules et différence des arguments ; puissance = formule de Moivre $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

Voir la fiche méthode : [Effectuer des calculs avec la forme exponentielle](#)

7. Comment linéariser une expression trigonométrique ?

Remplacer cosinus et sinus par les formules d'Euler, développer avec la formule du binôme, puis regrouper les paires conjuguées $e^{ik\theta} \pm e^{-ik\theta}$ pour reconstituer des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.

Voir la fiche méthode : [Linéariser une expression trigonométrique avec les formules d'Euler](#)

↓ Télécharger en PDF