

Introduction aux matrices

DURÉE ESTIMÉE

30 minutes

1. Définitions

Définition

Une **matrice** de dimension (ou d'*ordre* ou de *taille*) $n \times p$ est un tableau de nombres réels (appelés coefficients ou termes) comportant n lignes et p colonnes.

Si on désigne par a_{ij} le coefficient situé à la i -ième ligne et la j -ième colonne la matrice s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3 .

Notations

On notera, en abrégé, $A = (a_{ij})$ la matrice dont le coefficient situé à la i -ème ligne et la j -ième colonne est a_{ij} .

Définition

- Une matrice **carrée** est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes.
- Une matrice **ligne** est une matrice dont le nombre de lignes est égal à 1.
- Une matrice **colonne** est une matrice dont le nombre de colonnes est égal à 1.

Exemple

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée (de dimension 2×2 - ou on peut dire, plus simplement, de dimension 2).
- La matrice $B = (1 \quad 2 \quad 0,5)$ est une matrice ligne (de dimension 1×3).

- La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne (de dimension 4×1).

Remarque

Pour une matrice carrée, on appelle **diagonale principale**, la diagonale qui relie le coin situé en haut à gauche au coin situé en bas à droite. Sur l'exemple ci-dessous, les coefficients de la diagonale principale sont marqués en rouge :

$$A = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \textcolor{red}{3} & 4 & 5 \\ 3 & 4 & \textcolor{red}{5} & 6 \\ 4 & 5 & 6 & \textcolor{red}{7} \end{pmatrix}$$

Définition

- La matrice **nulle** de dimension $n \times p$ est la matrice de dimension $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.
- Une matrice **diagonale** est une matrice carrée dont tout les coefficients situés en dehors de la diagonale principale sont nuls.
- La matrice **unité** de dimension n est la matrice carrée de dimension n qui contient des 1 sur la diagonale principale et des 0 ailleurs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 4.
- La matrice unité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Opérations sur les matrices

Définition (Somme de matrices)

Soient A et B deux matrices de même dimension.

La somme $A + B$ des matrices A et B s'obtient en ajoutant les coefficients de A aux coefficients de B situés **à la même position**.

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors :

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 - 1 & -2 + 1 & 1 + 1 \\ -1 - 2 & 1 + 2 & 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque

- On ne peut additionner deux matrices que si elles ont les même dimensions, c'est à dire le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.
- On définit de manière analogue la différence de deux matrices.

Définition (Produit d'une matrice par un nombre réel)

Soient A une matrice et k un nombre réel.

Le produit kA est la matrice obtenue en multipliant chacun des coefficients de A par k .

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors :

- $2A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 1 & 2 \times 0 \\ 2 \times 2 & 2 \times 0 & 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- $-A = -1 \times A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Propriété

Soient A , B et C trois matrices de mêmes dimensions et k et k' deux réels.

- $A + B = B + A$ (commutativité de l'addition) ;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité de l'addition) ;
- $k(A + B) = kA + kB$;
- $(k + k')A = kA + k'A$;
- $k(k'A) = (kk')A$.

Définition (Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne)

Soient $A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$ une matrice ligne $1 \times n$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ une

matrice colonne $n \times 1$. Le produit de A par B est le nombre réel :

$$A \times B = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Remarque

- Les deux matrices A et B doivent avoir le même nombre n de coefficients.
- Pour cette formule, la matrice ligne doit être impérativement en premier !

Exemple

$$\text{Si } A = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} :$$

$$A \times B = 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 7 + 4 \times 8 = 5 + 12 + 21 + 32 = 70.$$

Définition (Produit de deux matrices)

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Le produit de A par B est la matrice $C = (c_{ij})$ à n lignes et q colonnes dont le coefficient situé à la i -ième ligne et la j -ième colonne est obtenu en multipliant la i -ième ligne de A par la j -ième colonne de B .

C'est à dire que pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq q$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Remarque

Faites bien attention aux dimensions des matrices : Le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la seconde pour que le calcul soit possible.

Par exemple, le produit d'une matrice 2×3 par une matrice 3×4 est possible et donnera une matrice 2×4 .

Par contre, le produit d'une matrice 2×3 par une matrice 2×3 n'est pas possible.

Exemple

Calculons le produit $C = A \times B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce calcul est possible car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le résultat C sera une matrice 2×3 (2×2 par 2×3 donne 2×3).

$$\text{Notons } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer c_{11} on multiplie la première ligne de A et la première colonne de B :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

on a donc $c_{11} = 2 \times (-1) + 4 \times (-2) = -2 - 8 = -10$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Pour calculer c_{12} on multiplie la première ligne de A et la seconde colonne de B :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

on a donc $c_{12} = 2 \times 0 + 4 \times 1 = 0 + 4 = 4$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Et ainsi de suite...

Au final on trouve :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dans ce qui suit, on s'intéressera principalement à des matrices **carrées**.

Propriété

Soit A , B et C , trois matrices carrées de même dimension.

- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (distributivité à gauche)
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ (distributivité à droite)
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativité de la multiplication)

Par contre en général : $A \times B \neq B \times A$: la multiplication n'est **pas** commutative.

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tandis que :

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $A \times B \neq B \times A$.

Définition (Puissance d'une matrice)

Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.

On note A^n la matrice :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}$$

Remarque

Par convention, on considèrera que A^0 est la matrice unité de même taille que A .

Définition (Matrice inversible)

Une matrice carrée A de dimension n est **inversible** si et seulement si il existe une

matrice B telle que

$$A \times B = B \times A = I_n$$

où I_n est la matrice unité de dimension n .

La matrice B est appelée **matrice inverse** de A et notée A^{-1} .

3. Résolution de systèmes d'équations

Soit le système :

$$(S) \begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$$

d'inconnues x et y .

Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$, le système (S) peut s'écrire :

$A \times X = B$. Le théorème ci-dessous permet alors de résoudre ce système.

Théorème

Soit A une matrice carrée.

Si A est inversible, le système $A \times X = B$ admet une solution unique donnée par :

$$X = A^{-1} \times B$$

Exemple

On cherche à résoudre le système :

$$(S) \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 5x + 7y = 2 \end{cases}$$

Pour cela on pose : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'écriture matricielle est alors $A \times X = B$.

A la calculatrice, on trouve que A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

La solution du système est donné par :

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C'est à dire $x = -1$ et $y = 1$.

Les questions essentielles

1. Comment additionner deux matrices ou multiplier une matrice par un nombre ?

On vérifie d'abord que les matrices ont les mêmes dimensions, puis on opère coefficient par coefficient. Pour kA , on multiplie chaque coefficient par k .

Voir la fiche méthode : [Calculer la somme de matrices et le produit par un réel ↗](#)

2. Comment calculer le produit de deux matrices ?

Le produit $A \times B$ n'existe que si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B . Chaque coefficient s'obtient en multipliant une ligne de A par une colonne de B .

Voir la fiche méthode : [Calculer le produit de deux matrices ↗](#)

3. Comment calculer une puissance A^n ?

Pour n petit, on calcule directement $A^2, A^3 \dots$. Pour un n quelconque, on conjecture une formule en observant les premières

puissances et on la démontre par récurrence.

Voir la fiche méthode : [Calculer une puissance de matrice ↗](#)

4. Comment savoir si une matrice 2×2 est inversible et calculer son inverse ?

On calcule le déterminant $\Delta = ad - bc$. Si $\Delta \neq 0$, la matrice est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 ↗](#)

5. Comment résoudre un système linéaire à l'aide des matrices ?

On écrit le système sous la forme $A \times X = B$, on vérifie que A est inversible, puis on calcule $X = A^{-1} \times B$.

Voir la fiche méthode : [Résoudre un système linéaire à l'aide de l'écriture matricielle ↗](#)