

Lois à densité

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE

Vérifier qu'une fonction est une densité de probabilité

Calculer une probabilité avec une loi à densité

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité

Utiliser la loi uniforme sur un intervalle

Calculer une probabilité avec la loi exponentielle

Utiliser la propriété de durée de vie sans vieillissement

Il arrive qu'une variable aléatoire puisse prendre n'importe quelle valeur sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On parle alors de variable aléatoire continue.

Pour une telle variable, les événements qui vont nous intéresser ne sont plus $(X = 5)$, $(X = 20)$, etc..., mais $(X \leq 5)$, $(5 \leq X \leq 20)$, etc...

1. Généralités

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a; b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 1$.

On dit que X est une variable aléatoire réelle continue de densité f si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ et tout $x_2 \in I$ ($x_1 \leq x_2$) :

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Exemple

La fonction f définie sur $I = [0; 2]$ par $f(x) = \frac{x}{2}$ est une fonction continue et positive sur I .

La fonction $F : x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est une primitive de f sur I , par conséquent :

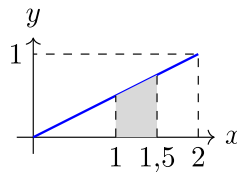
$$\int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^2 = 1$$

f est donc une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans I de densité f , on a alors, par exemple :

$$P(1 \leq X \leq 1,5) = \int_1^{1,5} f(x)dx$$

$P(1 \leq X \leq 1,5)$ est donc l'aire (en u.a.) colorée ci-dessous :



Aire correspondant à la probabilité $P(1 \leq X \leq 1,5)$

Un calcul simple montre que $P(1 \leq X \leq 1,5) = \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^{1,5} = 0,3125$.

Remarque

- On peut étendre cette définition aux cas où l'une ou les deux bornes a et b sont infinies.
Dans ce cas, on remplace la condition $\int_a^b f(x)dx = 1$ par une condition portant sur une limite ;
par exemple si b vaut $+\infty$, la condition $\int_a^b f(x)dx = 1$ deviendra $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(x)dx = 1$
- Comme indiqué en introduction, les événements du type $(X = k)$ ne sont pas intéressants car pour tout k appartenant à I , $p(X = k) = \int_k^k f(x)dx = 0$.
- On peut employer indifféremment des inégalités larges ou strictes :
 $p(x_1 < X < x_2) = p(x_1 \leq X \leq x_2)$.

Définition

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de densité f sur $[a; b]$ est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

Exemple

Si l'on reprend l'exemple de la fonction f définie sur $I = [0; 2]$ par $f(x) = \frac{x}{2}$, l'espérance mathématique est :

$$E(X) = \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X de densité f sur $[a; b]$ est la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t) dt$$

Pour $x \leq a$, $F(x) = 0$; pour $x \geq b$, $F(x) = 1$.

Exemple

Pour la fonction f définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \frac{x}{2}$, la fonction de répartition est, pour tout $x \in [0; 2]$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^x = \frac{x^2}{4}.$$

On vérifie bien que $F(0) = 0$ et $F(2) = 1$.

Définition

La **variance** d'une variable aléatoire X de densité f sur $[a; b]$ est le réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \int_a^b (x - E(X))^2 f(x) dx$$

On a la formule équivalente (König-Huygens) : $V(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - (E(X))^2$.

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

2. Loi uniforme sur un intervalle

Définition

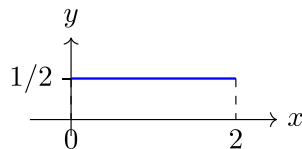
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ si sa densité de probabilité f est constante sur $[a; b]$.

Cette densité vaut alors, pour tout réel $x \in [a; b]$:

$$f(x) = \frac{1}{b - a}$$

Exemple

La densité de la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 2]$ est représentée ci-dessous :



Densité de la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 2]$

Remarque

Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{b-a}$ sur $[a; b]$ est $x \mapsto \frac{x}{b-a}$.

On vérifie alors que : $\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x}{b-a} \right]_a^b = 1$.

Propriété

Si X suit une loi uniforme sur $[a; b]$, alors pour tous réels c et d compris entre a et b avec $c < d$:

$$p(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

[preuve]

En effet, si $a \leq c < d \leq b$ alors :

$$p(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$$

[/preuve]

Théorème

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$ est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

[preuve]

La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2(b-a)}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{b-a}$ sur $[a; b]$; par conséquent :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

[/preuve]

Propriété

Si X suit une loi uniforme sur $[a; b]$, sa variance est $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Remarque

Le cas particulier de la loi uniforme sur $[0; 1]$ joue un rôle fondamental en simulation : sa densité vaut $f(x) = 1$ sur $[0; 1]$, son espérance est $\frac{1}{2}$ et sa variance est $\frac{1}{12}$. Toutes les fonctions de génération de nombres pseudo-aléatoires (par exemple `random()` en Python) reposent sur cette loi.

3. Loi exponentielle de paramètre lambda

Définition

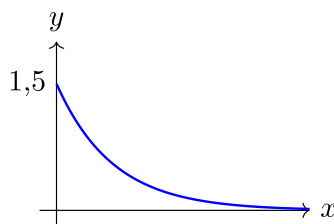
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $[0; +\infty[$ si sa densité de probabilité f est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Exemple

La densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$ est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1,5e^{-1,5x}$.

Cette fonction est représentée ci-dessous :



Remarque

La fonction $x \mapsto -e^{-\lambda x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$.

On vérifie alors que :

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-\lambda x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} -e^{-\lambda t} + 1 = 1.$$

Propriété

Si X suit une exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$, alors pour tous réels positifs x_1 et x_2 :

- $p(x_1 \leq X \leq x_2) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$
- $p(X \geq x_1) = e^{-\lambda x_1}$

[preuve]

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{x_1}^{x_2} = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$$

La seconde égalité s'obtient alors en faisant tendre x_2 vers $+\infty$.

[/preuve]

Théorème

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Propriété

Soient X une variable aléatoire qui suit une exponentielle de paramètre λ et x et x_0 deux réels, alors :

$$p_{(X > x_0)}(X > x + x_0) = p(X > x)$$

On dit qu'une loi exponentielle est « sans vieillissement ».

[commentaire]

Tout d'abord, rappelons que la notation $p_{(X > x_0)}(X > x + x_0)$ indique la probabilité (conditionnelle) de l'événement $(X > x + x_0)$ sachant que l'événement $(X > x_0)$ est réalisé.

Supposons que X modélise la durée de vie d'une machine.

- $p(X > x)$ correspond à la probabilité qu'une machine « neuve » fonctionne pendant une durée supérieure ou égale à x ;
- $p_{(X > x_0)}(X > x + x_0)$ est la probabilité qu'une machine, qui a déjà fonctionné pendant une durée x_0 , fonctionne encore pendant une durée supérieure ou égale à x .

Dans le cadre d'une loi exponentielle, ces probabilités sont égales ce qui explique l'expression « sans vieillissement ».

[/commentaire]

Les questions essentielles

1. Comment vérifier qu'une fonction est une densité de probabilité ?

Il faut vérifier trois conditions : la fonction est continue sur l'intervalle, elle est positive, et son intégrale sur tout l'intervalle vaut 1.

Voir la fiche méthode : [Vérifier qu'une fonction est une densité de probabilité](#)

2. Comment calculer une probabilité avec une loi à densité ?

On traduit l'événement en intégrale : $p(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx$, puis on calcule cette intégrale à l'aide d'une primitive.

Voir la fiche méthode : [Calculer une probabilité avec une loi à densité](#)

3. Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité ?

On applique la formule $E(X) = \int_a^b x f(x) dx$: on développe le produit $x \times f(x)$, on cherche une primitive et on calcule.

Voir la fiche méthode : [Calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité](#)

4. Comment utiliser la loi uniforme sur un intervalle ?

Pour une loi uniforme sur $[a; b]$, on applique directement les formules

$$p(c \leq X \leq d) = \frac{d - c}{b - a} \text{ et } E(X) = \frac{a + b}{2}.$$

Voir la fiche méthode : [Utiliser la loi uniforme sur un intervalle](#)

5. Comment calculer une probabilité avec la loi exponentielle ?

On utilise les formules directes $p(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$, $p(X \geq a) = e^{-\lambda a}$ ou $p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Voir la fiche méthode : [Calculer une probabilité avec la loi exponentielle](#)

6. Que signifie « la loi exponentielle est sans vieillissement » ?

Cela signifie que $p_{(X > s)}(X > s + t) = p(X > t)$: la probabilité qu'un composant fonctionne encore pendant une durée t ne dépend pas du temps déjà écoulé.

Voir la fiche méthode : [Utiliser la propriété de durée de vie sans vieillissement](#)