

Loi binomiale et loi géométrique

DURÉE ESTIMÉE

30 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Reconnaître un schéma de Bernoulli et identifier une loi binomiale

Calculer une probabilité avec la loi binomiale

Calculer et interpréter l'espérance d'une loi binomiale

Calculer une probabilité avec la loi géométrique

Utiliser l'absence de mémoire de la loi géométrique

1. Loi de Bernoulli



Définition

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p (avec $0 < p < 1$) une expérience aléatoire ayant deux issues :

- l'une appelée succès (généralement notée S) de probabilité p ,
- l'autre appelée échec (généralement notée $\bar{S}$) de probabilité $1 - p$.



Définition

On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Cette variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre p , définie par le tableau suivant.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p

Exemple

Au bonneteau, deux cartes noires et une carte rouge sont présentées, faces cachées, sur la table. Le maître du jeu manipule les cartes rapidement et un joueur doit retrouver la carte rouge.

On suppose que le joueur choisit une carte complètement au hasard.

On a affaire à une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

La probabilité de succès est : $p(S) = p = \frac{1}{3}$ et la probabilité d'échec $p(\bar{S}) = 1 - p = \frac{2}{3}$

Propriété

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p est :

$$E(X) = p$$

[preuve]

D'après la définition de l'espérance mathématique :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

[/preuve]

2. Schéma de Bernoulli - Loi binomiale

Définition

On appelle schéma de Bernoulli la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire 3 boules au hasard.

- Si l'épreuve s'effectue sans remise, les tirages ne sont ni identiques, ni indépendants. En effet, le fait d'avoir retiré une boule lors du premier tirage fait que le second tirage n'est pas identique au premier.

- Si l'épreuve s'effectue avec remise, on pourra, par contre, considérer que les tirages sont identiques et indépendants. On a donc bien, dans ce cas, un schéma de Bernoulli

Définition

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves ayant chacune une probabilité de succès égale à p .

La variable aléatoire X suit une loi appelée loi binomiale de paramètres n et p , souvent notée $\mathcal{B}(n; p)$.

Exemple

On reprend l'exemple précédent : tirage au hasard et avec remise de 3 boules parmi 5 boules comportant 2 boules rouges et 3 boules blanches. On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules rouges obtenues. La variable X suit une loi binomiale de paramètres 3

(nombre d'épreuves) et $\frac{2}{5}$ (probabilité d'obtenir une boule rouge lors d'une épreuve).

Ce schéma peut être représenté par l'arbre suivant :

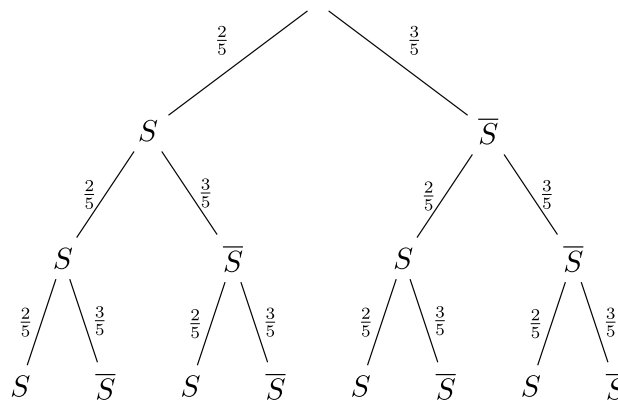


Schéma de Bernoulli (3 épreuves)

Grâce à l'arbre on voit que :

- la probabilité d'avoir 3 succès (c'est à dire 3 boules rouges) est $p(X = 3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$

- il y a 3 chemins qui correspondent à 2 succès ($SS\bar{S}$, $S\bar{S}S$, $\bar{S}SS$). La probabilité d'obtenir 2 boules rouges est donc :

$$p(X = 2) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = 3 \times \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5}\right] = \frac{36}{125}$$

- il y a également 3 chemins qui correspondent à un unique succès ($\bar{S}\bar{S}S$, $\bar{S}S\bar{S}$, $S\bar{S}\bar{S}$). La probabilité d'obtenir une unique boule rouge est donc :

$$p(X = 1) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 3 \times \left[\frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2\right] = \frac{54}{125}$$

- la probabilité de n'avoir aucune boule rouge est $p(X = 0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

La loi de X est donc donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

On vérifie bien que $\frac{27}{125} + \frac{54}{125} + \frac{36}{125} + \frac{8}{125} = 1$

Propriété

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ est :

$$E(X) = np$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, la variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{2}{5}\right)$.

Son espérance mathématique est donc $E(X) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$

On vérifie que l'on obtient bien le même résultat en utilisant le tableau de la loi de X et la définition de l'espérance mathématique :

$$E(X) = 0 \times \frac{27}{125} + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125} = \frac{150}{125} = 1,2$$

Propriété

La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ sont :

$$V(X) = np(1 - p) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

Remarque

La variance et l'écart-type mesurent la dispersion des valeurs de X autour de son espérance $E(X) = np$: plus $\sigma(X)$ est grand, plus les résultats observés sont susceptibles de s'écarter de la moyenne.

Exemple

Dans une boulangerie, on interroge 50 clients pris au hasard et de façon indépendante ; chacun demande une baguette traditionnelle avec la probabilité $p = 0,15$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de clients demandant une baguette traditionnelle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,15)$.

Son espérance vaut $E(X) = np = 50 \times 0,15 = 7,5$.

Sa variance vaut :

$$V(X) = np(1 - p) = 50 \times 0,15 \times 0,85 = 6,375$$

Son écart-type vaut donc :

$$\sigma(X) = \sqrt{6,375} \approx 2,52$$

3. Coefficients binomiaux



Définition

On considère un arbre pondéré représentant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (lire k parmi n) est le nombre de chemins qui correspondent à k succès.



Exemple

On reprend le même exemple que précédemment. On a vu, par exemple, qu'il y avait 3 chemins correspondant à 2 succès. On a donc $\binom{3}{2} = 3$.



Remarque

- On peut aussi employer le mot combinaisons pour désigner un coefficient binomial ;
- Pour calculer un coefficient binomial sur la plupart des calculatrices on utilise la commande nCr. Dans un tableur, on utilise la formule =COMBIN(n;k).



Propriété

Symétrie des coefficients binomiaux. Pour tous entiers n et k tels que $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Choisir les k succès parmi n revient en effet à choisir les $n - k$ échecs.

Propriété

Triangle de Pascal. Pour tous entiers $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Cette relation permet de calculer de proche en proche tous les coefficients binomiaux : chaque coefficient est la somme des deux coefficients situés au-dessus de lui dans le triangle de Pascal.

Exemple

Le triangle de Pascal donne les coefficients $\binom{n}{k}$ pour les premières valeurs de n . Chaque nombre est la somme des deux nombres placés juste au-dessus de lui.

$$\begin{array}{ccccccc} n = 0 & & & & & & 1 \\ n = 1 & & & & 1 & & 1 \\ n = 2 & & & 1 & & 2 & & 1 \\ n = 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ n = 4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ n = 5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Triangle de Pascal (lignes $n = 0$ à $n = 5$)

On lit par exemple, sur la ligne $n = 4$: $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$ et $\binom{4}{4} = 1$. La symétrie $\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$ apparaît directement, et la règle de Pascal donne $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$.

Théorème

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n; p)$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

[preuve]

Dans l'arbre du schéma de Bernoulli, chaque chemin correspond à une suite de n épreuves indépendantes. Un chemin réalisant exactement k succès comporte k branches « succès » (de probabilité p) et $n - k$ branches « échec » (de probabilité $1 - p$) ; sa probabilité vaut donc $p^k (1 - p)^{n-k}$.

Le nombre de chemins réalisant exactement k succès est, par définition, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$. En sommant les probabilités de ces chemins disjoints, on obtient :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

[/preuve]

Exemple

On lance 8 fois une pièce équilibrée et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on obtient Pile.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir 4 fois Pile (par exemple) est :

$$p(X = 4) = \binom{8}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$\binom{8}{4} = 70$ (à la calculatrice)

Donc :

$$p(X = 4) = 70 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}$$

4. Loi géométrique



Définition

On répète, de manière indépendante, une même épreuve de Bernoulli de paramètre p (avec $0 < p < 1$) jusqu'à l'obtention du premier succès.

La variable aléatoire X qui donne le rang du premier succès suit la **loi géométrique** de paramètre p .



Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p .

Pour tout entier naturel $k \geq 1$:

$$p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p$$

[preuve]

L'événement $(X = k)$ correspond à la suite : $k - 1$ échecs successifs suivis d'un succès au k -ième essai.

Les épreuves étant indépendantes, on obtient :

$$p(X = k) = \underbrace{(1 - p) \times (1 - p) \times \cdots \times (1 - p)}_{k-1 \text{ facteurs}} \times p = (1 - p)^{k-1} \times p$$

[/preuve]



Exemple

On lance un dé équilibré à six faces jusqu'à obtenir un 6. On note X le numéro du lancer où ce premier 6 apparaît.

X suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir le premier 6 au troisième lancer est :

$$p(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0,116$$

Propriété

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi géométrique de paramètre p est (admis) :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Remarque

$E(X)$ s'interprète comme le **nombre moyen d'essais** nécessaires pour obtenir le premier succès.

Dans l'exemple précédent, il faut en moyenne $\frac{1}{1/6} = 6$ lancers pour obtenir un premier 6.

Propriété

Absence de mémoire. Si X suit la loi géométrique de paramètre p , alors pour tous entiers naturels $n \geq 0$ et $k \geq 1$:

$$p_{X>n}(X > n + k) = p(X > k)$$

Autrement dit, sachant que les n premières épreuves sont des échecs, la probabilité d'attendre encore au moins k épreuves pour le premier succès est la même que la probabilité initiale d'attendre au moins k épreuves : la loi « oublie » le passé.

Remarque

Cette propriété caractérise la loi géométrique parmi les lois discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: c'est la seule loi discrète sans mémoire.

Les questions essentielles

1. Comment reconnaître qu'une situation suit une loi binomiale ?

Il faut vérifier trois conditions : une épreuve à deux issues (succès / échec), répétée un nombre fixé n de fois, dans des conditions identiques et indépendantes (typiquement avec remise). X compte alors le nombre de succès et suit $\mathcal{B}(n; p)$.

Voir la fiche méthode : [Reconnaître un schéma de Bernoulli et identifier une loi binomiale](#)

2. Comment calculer une probabilité avec la loi binomiale ?

Pour $p(X = k)$, appliquer $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ avec la touche **nCr** de la calculatrice. Pour $p(X \leq k)$, utiliser **binomFRép** ; pour $p(X \geq k)$, passer par l'événement contraire $1 - p(X \leq k - 1)$.

Voir la fiche méthode : [Calculer une probabilité avec la loi binomiale](#)

3. Comment calculer et interpréter l'espérance d'une loi binomiale ?

L'espérance est $E(X) = np$. Elle représente le nombre moyen de succès attendu si l'expérience est répétée un grand nombre de fois. Elle n'est pas nécessairement entière.

Voir la fiche méthode : [Calculer et interpréter l'espérance d'une loi binomiale](#)

4. Comment calculer une probabilité avec la loi géométrique ?

X donne le rang du premier succès. La formule est $p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p$. On a aussi $p(X > k) = (1 - p)^k$ et $p(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k$. L'espérance vaut

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

Voir la fiche méthode : [Calculer une probabilité avec la loi géométrique](#)

5. Que signifie l'absence de mémoire de la loi géométrique ?

Sachant que les n premières épreuves ont échoué, la probabilité d'attendre encore au moins k épreuves pour le premier succès est la même qu'au départ :

$$p_{X>n}(X > n + k) = p(X > k). \text{ La loi « oublie » le passé.}$$

Voir la fiche méthode : [Utiliser l'absence de mémoire de la loi géométrique](#)