

Probabilités conditionnelles

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Calculer une probabilité conditionnelle

Construire un arbre pondéré et calculer une intersection

Appliquer la formule des probabilités totales

Montrer (ou réfuter) l'indépendance de deux événements

Inverser un conditionnement avec la formule de Bayes

Calculer et interpréter les indicateurs d'un test diagnostique

1. Conditionnement



Définition

A et B étant deux événements tels que $p(A) \neq 0$, la probabilité de B sachant A est le nombre réel :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$



Remarque

- On note aussi $p_A(B)$ pour « probabilité de B sachant A » ; on évite la notation $p(B | A)$, ambiguë avec une division.
- Rappel : Le signe $\cap$ (intersection) correspond à « et ».
- De même si $p(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B est $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Exemple

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement 2 boules sans remise. On note :

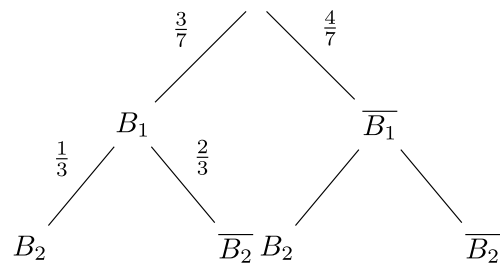
- B_1 l'événement « la première boule tirée est blanche »
- B_2 l'événement « la seconde boule tirée est blanche »

La probabilité $p_{B_1}(B_2)$ est la probabilité que la seconde boule soit blanche sachant que la première était blanche. Pour la calculer, on se place dans la situation où l'on se trouve après avoir obtenu une boule blanche au premier tirage. Il reste alors 6 boules dans l'urne ; 2 sont blanches et 4 sont rouges.

La probabilité de tirer une boule blanche au second tirage est donc :

$$p_{B_1}(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Cette probabilité se place sur l'arbre de la façon suivante :

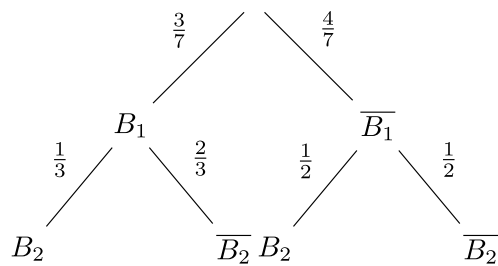


Arbre de probabilité incomplet

On peut calculer de même $p_{\overline{B_1}}(B_2)$ est la probabilité que la seconde boule soit blanche sachant que la première était rouge. Il reste alors 3 boules blanches et 3 boules rouges après le premier tirage donc :

$$p_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

et on peut compléter l'arbre :



Arbre de probabilité complet

Propriété

De la définition précédente, on déduit immédiatement que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

Remarque

Attention à ne pas confondre :

- $p(A \cap B)$ qui est la probabilité que A et B soient réalisés alors qu'on ne possède aucune indication sur la réalisation de A ou de B
- $p_A(B)$ qui est la probabilité que B soit réalisé alors qu'on sait déjà que A est réalisé.

Exemple

Si l'on reprend l'exemple précédent, la probabilité de tirer 2 boules blanches est $p(B_1 \cap B_2)$ (il faut que la première boule soit blanche et que la seconde boule soit blanche).

D'après la formule précédente :

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$$

2. Formule des probabilités totales



Définition

On dit que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω si chaque élément de Ω appartient à un et un seul des A_i



Exemple

On lance un dé à 6 faces. On peut modéliser cette expérience par l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Les événements :

- $A_1 = \{1; 2\}$ (le résultat est inférieur à 3)
- $A_2 = \{3\}$ (le résultat est égal à 3)
- $A_3 = \{4; 5; 6\}$ (le résultat est supérieur à 3)

forment une partition de Ω . En effet, chacune des six éventualités 1, 2, 3, 4, 5, 6 appartient à et à un seul des A_i .



Remarque

A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, quel que soit l'événement A . En effet, toute éventualité appartient soit à un événement, soit à son contraire et ne peut appartenir au deux en même temps.



Théorème

Formule des probabilités totales

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de l'univers Ω . Pour tout événement B :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

Cas particulier fréquent



Propriété

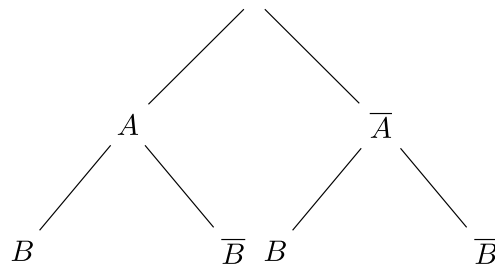
Comme A et $\bar{A}$ forme une partition de l'univers :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$



Remarque

Le diagramme ci-dessous montre, sur un arbre, les chemins à prendre en compte pour calculer $p(B)$. Ce sont les chemins qui aboutissent à B .



Chemins menant à l'événement B



Exemple

Si on reprend l'exemple ci-dessus, la probabilité que la seconde boule soit blanche est :

$$p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(\bar{B}_1 \cap B_2)$$

$$p(B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(\bar{B}_1) \times p_{\bar{B}_1}(B_2)$$

$$p(B_2) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

3. Indépendance d'événements

Définition

Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre, autrement dit lorsque :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Remarque

Si $p(A) \neq 0$, l'indépendance équivaut à $p_A(B) = p(B)$: savoir que A est réalisé ne change rien à la probabilité de B .

Exemple

On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On note A : « obtenir Pile au premier lancer » et B : « obtenir Face au second lancer ».

Les deux lancers étant indépendants : $p(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(A) \times p(B)$.

Les événements A et B sont donc indépendants.

4. Formule de Bayes

Théorème

Formule de Bayes

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors :

$$p_B(A) = \frac{p(A) \times p_A(B)}{p(B)}$$

Remarque

Cette formule, appelée **inversion du conditionnement**, permet de calculer $p_B(A)$ à partir de $p_A(B)$. Elle est centrale en inférence bayésienne : on dit que $p(A)$ est la probabilité *a priori* de A et $p_B(A)$ sa probabilité *a posteriori* (après observation de B).

Exemple

Un test médical est positif chez 95 % des malades et chez 2 % des personnes saines. La maladie touche 1 % de la population.

On note M : « être malade » et T : « le test est positif ».

On a $p(M) = 0,01$, $p_M(T) = 0,95$, $p_{\overline{M}}(T) = 0,02$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(M) \times p_M(T) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T) = 0,01 \times 0,95 + 0,99 \times 0,02 = 0,0293$$

D'après la formule de Bayes, la probabilité d'être réellement malade sachant que le test est positif vaut :

$$p_T(M) = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0,01 \times 0,95}{0,0293} \approx 0,324$$

Bien que le test paraisse fiable, moins d'un tiers des personnes positives sont effectivement malades : la rareté de la maladie pèse fortement sur la probabilité *a posteriori*.

5. Tests diagnostiques



Définition

Pour un test diagnostique appliqué à une maladie M et donnant un résultat positif T :

- La **sensibilité** du test est $p_M(T)$ (probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade).
- La **spécificité** est $p_{\overline{M}}(\overline{T})$ (probabilité que le test soit négatif sachant que la personne est saine).
- La **valeur prédictive positive** est $p_T(M)$ (probabilité d'être malade sachant que le test est positif).
- La **valeur prédictive négative** est $p_{\overline{T}}(\overline{M})$ (probabilité d'être sain sachant que le test est négatif).



Remarque

Les valeurs prédictives dépendent de la prévalence $p(M)$ de la maladie : un même test n'a pas la même valeur prédictive selon la population testée. C'est pourquoi un test très sensible peut donner une faible valeur prédictive positive lorsque la maladie est rare (cf. l'exemple précédent).

Les questions essentielles

1. Comment calculer une probabilité conditionnelle $p_A(B)$?

On utilise la formule $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ (à condition que $p(A) \neq 0$), ou la lecture directe d'un tableau d'effectifs ou d'un arbre pondéré.

Voir la fiche méthode : [Calculer une probabilité conditionnelle](#)

2. Comment construire un arbre pondéré et calculer une intersection ?

On place sur les branches partant de la racine les probabilités $p(A_i)$, puis sur les branches secondaires les conditionnelles $p_{A_i}(B)$. La probabilité d'une intersection $A \cap B$ est le produit des probabilités le long du chemin correspondant.

Voir la fiche méthode : [Construire un arbre pondéré et calculer une intersection](#)

3. Comment calculer $p(B)$ avec la formule des probabilités totales ?

On choisit une partition $A_1, \dots, A_n$ de l'univers, puis on additionne les probabilités de tous les chemins menant à B : $p(B) = \sum p(A_i) \times p_{A_i}(B)$.

Voir la fiche méthode : [Appliquer la formule des probabilités totales](#)

4. Comment montrer que deux événements sont indépendants ?

On compare $p(A \cap B)$ et $p(A) \times p(B)$: si les deux sont égaux, A et B sont indépendants ; sinon ils ne le sont pas. On peut aussi vérifier $p_A(B) = p(B)$ lorsque $p(A) \neq 0$.

Voir la fiche méthode : [Montrer \(ou réfuter\) l'indépendance de deux événements](#)

5. Comment renverser un conditionnement avec la formule de Bayes ?

On calcule d'abord $p(B)$ par les probabilités totales, puis on applique

$$p_B(A) = \frac{p(A) \times p_A(B)}{p(B)}.$$

Voir la fiche méthode : [Inverser un conditionnement avec la formule de Bayes](#)

6. Que signifient sensibilité, spécificité, VPP et VPN d'un test ?

La sensibilité $p_M(T)$ et la spécificité $p_{\overline{M}}(\overline{T})$ caractérisent le test ; les valeurs prédictives $p_T(M)$ (VPP) et $p_{\overline{T}}(\overline{M})$ (VPN) dépendent en plus de la prévalence et s'obtiennent avec la formule de Bayes.

Voir la fiche méthode : [Calculer et interpréter les indicateurs d'un test diagnostique](#)