

Les suites géométriques

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Démontrer qu'une suite est géométrique

Calculer un terme d'une suite géométrique

Étudier les variations d'une suite géométrique

Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

Déterminer la limite d'une suite géométrique

Étudier une suite arithmético-géométrique

1 - Caractéristiques d'une suite géométrique



Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$

Le réel q s'appelle la raison de la suite géométrique (u_n) .



Remarque

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les termes sont non nuls est une suite géométrique, on pourra calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si ce rapport est une constante q , on pourra affirmer que la suite est une suite géométrique de raison q .

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{3}{2^n}$.

Les termes de la suite sont tous strictement positifs et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2^n}} = \frac{3}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2 \times 2^n} = \frac{1}{2}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Propriété

Pour n et k quelconques entiers naturels, si la suite (u_n) est géométrique de raison q :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

En particulier $u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété

Réciproquement, soient a et b deux nombres réels. La suite (u_n) définie par $u_n = a \times b^n$ est une suite géométrique de raison $q = b$ et de premier terme $u_0 = a$.

[preuve]

$$u_{n+1} = a \times b^{n+1} = a \times b^n \times b = u_n \times b$$

et

$$u_0 = a \times b^0 = a \times 1 = a$$

[/preuve]

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme strictement positif :

- Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques de raison respectives q et q' alors le produit (w_n) de ces deux suites défini par :

$$w_n = u_n \times v_n$$

est une suite géométrique de raison $q'' = q \times q'$.

2 - Somme des puissances successives d'un nombre

Théorème

Soit q un nombre réel différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque

Cette formule n'est pas valable pour $q = 1$. Mais dans ce cas le calcul est immédiat car tous les termes sont égaux à 1.

Exemple

Soit à calculer la somme $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n$.

Donc :

$$S = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

3 - Limite de la suite (q^n) où $q \geq 0$

Théorème

Soit q un nombre réel positif.

- Si $q > 1$: alors q^n est aussi grand que l'on veut dès que n est suffisamment grand. On dit que la suite (q^n) tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $0 \leq q < 1$: alors q^n est aussi proche de zéro que l'on veut dès que n est suffisamment grand. On dit que la suite (q^n) tend vers 0 et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Remarque

Pour $q = 1$, $q^n = 1^n = 1$; la suite est constante, égale à 1, et tend donc vers 1.

4 - Suites arithmético-géométriques



Définition

Une suite arithmético-géométrique u_n est définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence du type :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

pour tout entier n , où a et b sont deux nombres réels.



Remarque

Attention : ces suites ne sont ni arithmétiques (sauf si $a = 1$) ni géométriques (sauf si $b = 0$).



Propriété

Il existe un nombre réel k tel que la suite v_n définie, pour tout entier n , par $v_n = u_n + k$ soit une suite géométrique de raison a .



Remarque

- En général, dans les exercices, le nombre k est donné (et sinon une démarche pour le trouver est indiquée). On demande alors de prouver que v_n est une suite géométrique de raison a .
- Puisque $v_n = u_n + k$, pour tout entier n , on a en particulier $v_0 = u_0 + k$ ce qui permet de connaître le premier terme de la suite v_n .
- $v_n = u_n + k$ signifie aussi que $u_n = v_n - k$.
Donc une fois que l'on connaît v_n on peut trouver u_n (voir exemple ci-dessous)

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 4$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 10$ est une suite géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

1. Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique

Pour montrer que la suite (v_n) est géométrique on va calculer v_{n+1} en fonction de v_n .

$v_n = u_n - 10$ pour tout entier n donc :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10$$

Or on sait que $u_{n+1} = 0,6u_n + 4$ donc :

$$v_{n+1} = 0,6u_n + 4 - 10 = 0,6u_n - 6$$

Ici, une petite astuce consiste à mettre 0,6 en facteur (on peut également dire que $u_n = v_n + 10$ et remplacer u_n par $v_n + 10$)

$$v_{n+1} = 0,6u_n - 0,6 \times 10 = 0,6(u_n - 10) = 0,6v_n$$

On a bien une relation du type $v_{n+1} = q \times v_n$ avec $q = 0,6$ ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,6.

2. Expression de u_n en fonction de n

Par ailleurs, $v_0 = u_0 - 10 = 5 - 10 = -5$.

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -5$ et de raison $q = 0,6$ donc pour tout entier n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -5 \times 0,6^n$$

Comme $u_n = v_n + 10$, on obtient finalement :

$$u_n = -5 \times 0,6^n + 10$$

5 - Limite de la somme des termes d'une suite géométrique



Théorème

Soit q un nombre réel tel que $0 \leq q < 1$. Alors la somme des puissances successives de q admet une limite finie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = \frac{1}{1 - q}$$

Plus généralement, si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q avec $0 \leq q < 1$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \frac{u_0}{1 - q}$$

[preuve]

On part de la formule de la somme partielle établie au paragraphe 2, valable pour $q \neq 1$:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Comme $0 \leq q < 1$, on sait (paragraphe 3) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, et donc aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$.

Le dénominateur $1 - q$ est une constante non nulle, donc par quotient de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

Pour une suite géométrique (u_n) quelconque de premier terme u_0 , chaque terme s'écrit $u_k = u_0 \times q^k$.

On peut donc mettre u_0 en facteur :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$$

La limite de cette somme est alors $u_0 \times \frac{1}{1 - q} = \frac{u_0}{1 - q}$.

[/preuve]

Exemple

On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \frac{1}{4}$. On veut connaître la limite de la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ lorsque n devient très grand.

La raison vérifie $0 \leq \frac{1}{4} < 1$, donc le théorème s'applique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

Autrement dit, en additionnant de plus en plus de termes, la somme se rapproche de **4** sans jamais le dépasser.

Attention

La formule $\frac{u_0}{1 - q}$ ne donne la limite de la somme **que** lorsque $0 \leq q < 1$ (plus généralement $|q| < 1$). Si $q \geq 1$, la somme S_n tend vers $+\infty$: elle n'a pas de limite finie.

6 - Représentation graphique d'une suite récurrente

Remarque

Lorsqu'une suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut visualiser ses termes à l'aide d'une construction graphique appelée **construction en escalier** (ou **en toile**). On trace dans un même repère :

- la courbe représentative de la fonction f ;
- la droite Δ d'équation $y = x$.

Propriété

Pour placer les termes successifs de la suite à partir de u_0 situé sur l'axe des abscisses :

1. On monte verticalement jusqu'à la courbe de f : l'ordonnée du point obtenu est $f(u_0) = u_1$.
2. On se déplace horizontalement jusqu'à la droite Δ d'équation $y = x$: cela reporte la valeur u_1 sur l'axe des abscisses.
3. On répète ces deux mouvements (vers la courbe, puis vers la droite) pour obtenir u_2 , puis u_3 , et ainsi de suite.

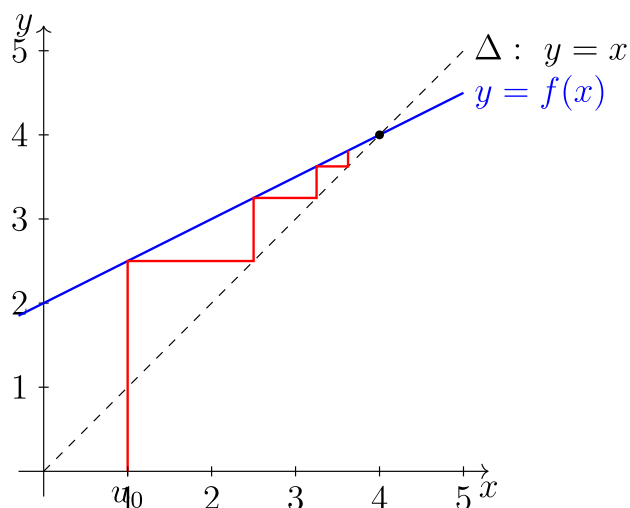
La figure obtenue permet de conjecturer le comportement de la suite : ici, les termes se rapprochent de l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite Δ .

Exemple

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$, c'est-à-dire $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0,5x + 2$.

Les premiers termes sont $u_0 = 1$, $u_1 = 2,5$, $u_2 = 3,25$, $u_3 = 3,625$.

La construction en escalier montre que les termes croissent et se rapprochent de 4, abscisse du point d'intersection de la droite $y = 0,5x + 2$ et de la droite Δ d'équation $y = x$. On peut donc conjecturer que la suite (u_n) converge vers 4.



Les questions essentielles

1. Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?

On vérifie que tous les termes sont non nuls puis on calcule le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour n quelconque. Si ce rapport est une constante q , la suite est géométrique de raison q .

Voir la fiche méthode : [Démontrer qu'une suite est géométrique](#)

2. Comment calculer un terme d'une suite géométrique ?

On utilise la formule explicite $u_n = u_0 \times q^n$ ou, plus généralement, $u_n = u_k \times q^{n-k}$ lorsqu'un autre terme u_k est connu à la place de u_0 .

Voir la fiche méthode : [Calculer un terme d'une suite géométrique](#)

3. Comment étudier les variations d'une suite géométrique ?

Pour $u_0 > 0$ et $q > 0$: la suite est croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$, constante si $q = 1$. Si $u_0 < 0$, le sens de variation est inversé.

Voir la fiche méthode : [Étudier les variations d'une suite géométrique](#)

4. Comment calculer la somme des termes d'une suite géométrique ?

On applique la formule $S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^N}{1 - q}$ où N est le **nombre de termes** additionnés. Pour la somme des puissances :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Voir la fiche méthode : [Calculer la somme des termes d'une suite géométrique](#)

5. Comment déterminer la limite d'une suite géométrique ?

On regarde la position de la raison q par rapport à 1 : si $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$; si $0 \leq q < 1$, $q^n \rightarrow 0$; si $q = 1$, la suite est constante. On multiplie ensuite par u_0 en tenant compte de son signe.

Voir la fiche méthode : [Déterminer la limite d'une suite géométrique](#)

6. Comment étudier une suite arithmético-géométrique ?

On introduit une suite auxiliaire $v_n = u_n + k$ qui est géométrique de raison a , on en déduit l'expression de v_n puis celle de $u_n = v_n - k$ et enfin la limite de (u_n) .

Voir la fiche méthode : [Étudier une suite arithmético-géométrique](#)