

Fonctions, limites et continuité

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Calculer la limite à l'infini d'une fonction polynôme

Calculer la limite à l'infini d'une fonction rationnelle

Calculer une limite par comparaison

Étudier la continuité d'une fonction

Démontrer l'existence d'une solution avec le TVI

Démontrer l'existence et l'unicité d'une solution (corollaire du TVI)

1. Limites d'une fonction



Définition

Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini.

On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que x soit assez grand. On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

On définit de manière analogue la limite en $-\infty$, et les limites infinies $+\infty$ ou $-\infty$.



Propriété

Limites usuelles à connaître

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 & \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty & \end{array}$$

Propriété

Opérations sur les limites

Les limites se calculent à partir de celles de la somme, du produit et du quotient, à condition d'éviter les **formes indéterminées** :

$$\infty - \infty \quad , \quad 0 \times \infty \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad \frac{0}{0}$$

Exemple

On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1)$.

Il s'agit d'une forme indéterminée $\infty - \infty$. On factorise par le terme dominant :

$$x^2 - 3x + 1 = x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 1$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$.

Propriété

Théorème de comparaison

Si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de $+\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Énoncé analogue avec $-\infty$ et l'inégalité opposée.

2. Fonctions continues

Définition

Une fonction définie sur un intervalle I est **continue** sur I si l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

Exemple

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle contenu dans leur ensemble de définition.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Si f et g sont continues sur I , alors les fonctions $f + g$, kf (avec $k \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont continues sur I .

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I , la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Théorème

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I .

Remarque

Attention ! La réciproque est fausse.

Par exemple, la fonction valeur absolue ($x \mapsto |x|$) est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier mais n'est pas dérivable en 0.

3. Théorème des valeurs intermédiaires



Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et si y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = y_0$ admet **au moins une solution** sur l'intervalle $[a; b]$.



Remarque

- Ce théorème dit que l'équation $f(x) = y_0$ admet une ou plusieurs solutions mais ne permet pas de déterminer le nombre de ces solutions. Pour ce dénombrement, on utilise le corollaire ci-dessous.
- **Cas particulier fréquent** : si f est continue et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$ (puisque 0 est alors compris entre $f(a)$ et $f(b)$).



Théorème

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$ et si y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = y_0$ admet **une unique solution** sur l'intervalle $[a; b]$.



Remarque

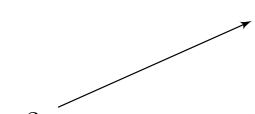
Il faut vérifier 3 conditions pour pouvoir appliquer ce corollaire :

1. f est continue sur $[a; b]$
2. f est strictement croissante ou strictement décroissante sur $[a; b]$
3. y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Exemple

Soit une fonction f définie sur $[0; 4]$ dont le tableau de variations est fourni ci-dessous :

x	0	4
f	-3	1



On cherche à déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$.

L'unique flèche oblique montre que la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 4]$.

-1 est compris entre $f(0) = -3$ et $f(4) = 1$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = -1$ admet **une unique solution** sur l'intervalle $[0; 4]$.

4. Réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Théorème

Soit f une fonction continue et **strictement monotone** sur un intervalle I . On note $J = f(I)$ l'intervalle image.

Alors f réalise une **bijection** de I sur J : tout réel de J admet un unique antécédent par f dans I .
La fonction qui à chaque y de J associe cet antécédent est appelée **fonction réciproque** de f et se note f^{-1} .

De plus, f^{-1} est continue sur J et a **le même sens de variation** que f .

Remarque

Ce résultat est une conséquence directe du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : pour chaque y_0 de J , l'équation $f(x) = y_0$ admet une unique solution dans I , qui est précisément $f^{-1}(y_0)$.

Par définition, pour tout x de I et tout y de J : $y = f(x)$ équivaut à $x = f^{-1}(y)$.

Propriété

Représentation graphique

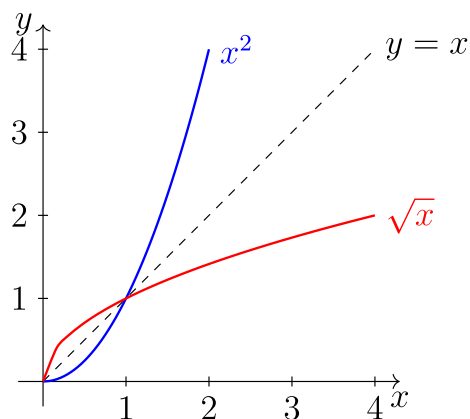
Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f^{-1} est la **symétrique** de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).

Exemple

La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est continue et strictement croissante sur $I = [0 ; +\infty[$. Son intervalle image est $J = f(I) = [0 ; +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur $[0 ; +\infty[$. Sa réciproque est la fonction racine carrée $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$, elle aussi continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

On retrouve bien l'équivalence, pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$: $y = x^2$ équivaut à $x = \sqrt{y}$. Par exemple, $f(3) = 9$ et $f^{-1}(9) = \sqrt{9} = 3$.



5. Limites et asymptotes



Définition

Asymptote horizontale

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (limite finie), on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

On définit de même une asymptote horizontale en $-\infty$ lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ est finie.



Définition

Asymptote verticale

Si f admet une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) lorsque x tend vers un réel a , on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f .



Exemple

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. La droite d'équation $y = 2$ est donc une **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ (pour $x > 0$), on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est donc une **asymptote verticale** à la courbe.

Remarque

Une asymptote indique le comportement de la courbe « au loin » : la courbe se rapproche de la droite asymptote sans nécessairement l'atteindre. Pour une asymptote horizontale, l'écart $f(x) - \ell$ tend vers 0 ; pour une asymptote verticale, la courbe « s'envole » vers $\pm\infty$ de part et d'autre de $x = a$.

Les questions essentielles

1. Comment calculer la limite à l'infini d'une fonction polynôme ?

On factorise par le terme de plus haut degré, puis on conclut par produit. La limite d'un polynôme à l'infini est égale à la limite de son terme dominant.

Voir la fiche méthode : [Calculer la limite à l'infini d'une fonction polynôme](#)

2. Comment lever une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ avec une fonction rationnelle ?

On factorise numérateur et dénominateur par leur terme dominant respectif, puis on simplifie. La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Voir la fiche méthode : [Calculer la limite à l'infini d'une fonction rationnelle](#)

3. Comment calculer une limite contenant un terme oscillant comme $\sin x$ ou $\cos x$?

On encadre la fonction par une expression de limite connue, puis on applique le théorème de comparaison (minoration vers $+\infty$ ou majoration vers $-\infty$).

Voir la fiche méthode : [Calculer une limite par comparaison](#)

4. Comment justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle ?

On invoque la continuité des fonctions de référence sur leur ensemble de définition (polynômes, rationnelles, exponentielle, logarithme, racine, sinus, cosinus) et les opérations sur les fonctions continues. On peut aussi utiliser le fait qu'une fonction dérivable sur un intervalle I est continue.

Voir la fiche méthode : [Étudier la continuité d'une fonction](#)

5. Comment montrer qu'une équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur $[a ; b]$?

On vérifie que f est continue sur $[a ; b]$ et que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires.

Voir la fiche méthode : [Démontrer l'existence d'une solution avec le TVI](#)

6. Comment démontrer qu'une équation admet une unique solution et l'encadrer ?

On applique le corollaire du TVI : continuité, stricte monotonie sur $[a ; b]$ et k compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On encadre ensuite la solution par balayage à la calculatrice avec un pas adapté à la précision demandée.

Voir la fiche méthode : [Démontrer l'existence et l'unicité d'une solution \(corollaire du TVI\)](#)