

Fonction logarithme népérien

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Simplifier une expression contenant $\ln$ Résoudre une équation contenant $\ln$ Résoudre une inéquation contenant $\ln$ Dériver une fonction contenant $\ln$ Calculer une limite avec $\ln$ Étudier une fonction contenant $\ln$ Résoudre un problème de modélisation avec $\ln$

1. Définition de la fonction logarithme népérien



Définition

Théorème et définition

Pour tout réel $x > 0$, l'équation $e^y = x$, d'inconnue y , admet une unique solution.

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à $x > 0$, associe le réel y solution de l'équation $e^y = x$.



Remarque

Pour $x \leq 0$, l'équation $e^y = x$ n'a pas de solution : la fonction $\ln$ n'est donc pas définie sur $] -\infty; 0]$.

Propriété

- Pour tout réel $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R} : e^y = x \iff y = \ln(x)$.
- Pour tout réel $x > 0 : e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout réel $x : \ln(e^x) = x$.

Remarque

- Ces propriétés se déduisent immédiatement de la définition.
- On dit que les fonctions « logarithme népérien » et « exponentielle » sont réciproques.
- On en déduit immédiatement : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Exemple

Résoudre $e^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

D'après la propriété, $e^x = 5 \iff x = \ln(5)$.

L'unique solution est $x = \ln(5) \approx 1,609$.

2. Étude de la fonction logarithme népérien

Théorème

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est définie par :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

[preuve]

Sa dérivée $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$.

[/preuve]



Propriété

Limites aux bornes

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.



Remarque

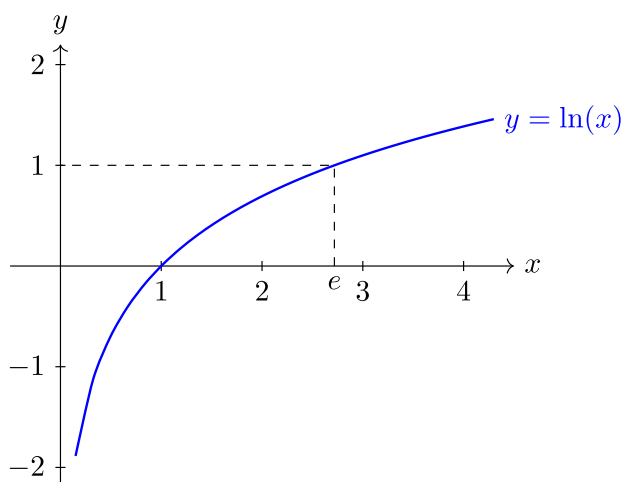
La courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.



Remarque

Ces résultats permettent de tracer le tableau de variation et la courbe représentative de la fonction logarithme népérien :

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$



Propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

Alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$f' = \frac{u'}{u}$$

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

La fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Théorème

Si a et b sont deux réels strictement positifs :

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$.
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$.

Remarque

- Le théorème précédent résulte de la stricte croissance de la fonction logarithme népérien.
- En particulier, comme $\ln(1) = 0 : \ln x < 0 \iff x < 1$. Ne pas oublier que $\ln(x)$ peut être négatif (si $0 < x < 1$) ; c'est une cause d'erreurs fréquente, notamment dans les inéquations.

3. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Théorème

Si a et b sont deux réels strictement positifs et si $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- $\ln(a^n) = n \ln a$.
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

Exemple

- $\ln(4) = \ln(2^2) = 2 \ln(2)$.
- Pour $x > 1 : \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$.

Cette égalité peut être utile (pour calculer la dérivée par exemple) mais elle suppose $x > 1$.

Si $x < -1$, l'expression $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ est définie mais pas $\ln(x+1) - \ln(x-1)$.

Les questions essentielles

1. Comment simplifier une expression contenant des logarithmes ?

On utilise les propriétés algébriques de $\ln$: un produit devient une somme, un quotient une différence, une puissance ou une racine sort en facteur. On regroupe ensuite les logarithmes pour obtenir l'expression la plus compacte possible.

Voir la fiche méthode : [Simplifier une expression contenant \$\ln\$](#)

2. Comment résoudre une équation contenant $\ln$?

On commence par déterminer le domaine de validité (chaque expression dans un $\ln$ doit être strictement positive), puis on regroupe les logarithmes pour obtenir une forme $\ln(A) = \ln(B)$ ou $\ln(A) = k$ avant d'appliquer l'injectivité de $\ln$ ou de passer à la forme exponentielle.

Voir la fiche méthode : [Résoudre une équation contenant \$\ln\$](#)

3. Comment résoudre une inéquation contenant $\ln$?

Comme pour une équation, on détermine le domaine de validité et on regroupe les logarithmes. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, le sens de l'inégalité est conservé : on aboutit à une inéquation classique dont la solution doit être intersectée avec le domaine.

Voir la fiche méthode : [Résoudre une inéquation contenant \$\ln\$](#)

4. Comment dériver une fonction contenant $\ln$?

On utilise les deux formules de référence : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ lorsque $u > 0$. Pour un produit ou un quotient, il est souvent plus rapide de simplifier d'abord avec les propriétés algébriques de $\ln$.

Voir la fiche méthode : [Dériver une fonction contenant \$\ln\$](#)

5. Comment calculer une limite contenant $\ln$?

On part des limites de référence ($\ln(x) \rightarrow -\infty$ en 0^+ , $\ln(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$) et des croissances comparées ($\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, $x \ln(x) \rightarrow 0$ en 0^+). En cas de forme indéterminée, on factorise par le terme dominant pour faire apparaître l'une de ces limites connues.

Voir la fiche méthode : [Calculer une limite avec \$\ln\$](#)

6. Comment étudier une fonction contenant $\ln$?

On suit le plan habituel : domaine de définition, limites aux bornes, dérivée, signe de la dérivée, tableau de variation. Les croissances comparées permettent de lever les formes indéterminées qui apparaissent souvent en $+\infty$ et en 0^+ .

Voir la fiche méthode : [Étudier une fonction contenant \$\ln\$](#)

7. À quoi sert le logarithme dans un problème de modélisation ?

Le logarithme népérien permet de résoudre toute équation où l'inconnue figure en exposant : seuil dans une croissance exponentielle, demi-vie radioactive, temps de doublement d'une suite géométrique. On isole l'exponentielle ou la puissance, puis on applique $\ln$ pour faire descendre l'exposant.

Voir la fiche méthode : Résoudre un problème de modélisation avec $\ln$