

Convexité

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Calculer la dérivée seconde d'une fonction

Étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée

Étudier la convexité d'une fonction

Déterminer un point d'inflexion

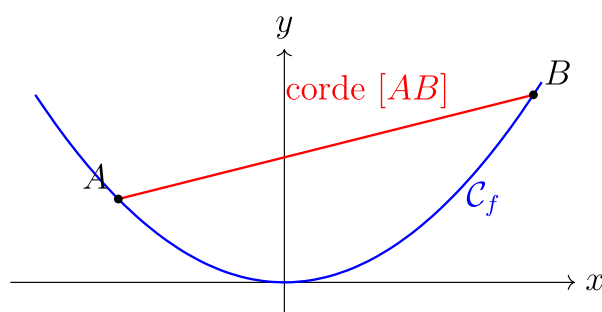
Lire graphiquement la convexité d'une fonction

1. Définition par les cordes

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Une **corde** de $\mathcal{C}_f$ est un segment $[AB]$ joignant deux points A et B de la courbe.

- On dit que f est **convexe** sur I si, pour tout choix de deux points A et B de $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessous de la corde $[AB]$.
- On dit que f est **concave** sur I si, pour tout choix de deux points A et B de $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la corde $[AB]$.



La fonction est convexe : entre A et B , la courbe reste sous la corde.

Remarque

En appliquant la définition au point d'abscisse égale au milieu de $[AB]$, on obtient l'**inégalité de convexité** : si f est convexe sur I , alors pour tous réels x et y de I ,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Autrement dit, l'image du milieu de $[x; y]$ est inférieure ou égale à la moyenne des images : l'ordonnée du point de la courbe est sous l'ordonnée du milieu de la corde. Pour une fonction concave, l'inégalité est inversée ($\geq$).

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2$. Prenons $x = 2$ et $y = 4$. Le milieu de $[x; y]$ a pour abscisse $\frac{2+4}{2} = 3$.

D'une part, $f(3) = 9$.

D'autre part, $\frac{f(2) + f(4)}{2} = \frac{4 + 16}{2} = 10$.

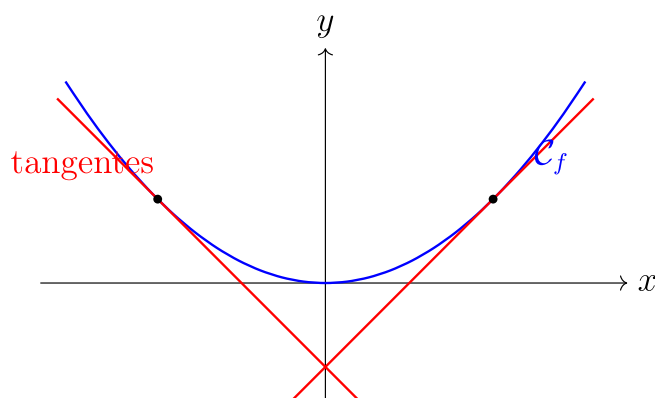
On a bien $9 \leq 10$, ce qui illustre l'inégalité de convexité : la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Position de la courbe par rapport aux tangentes

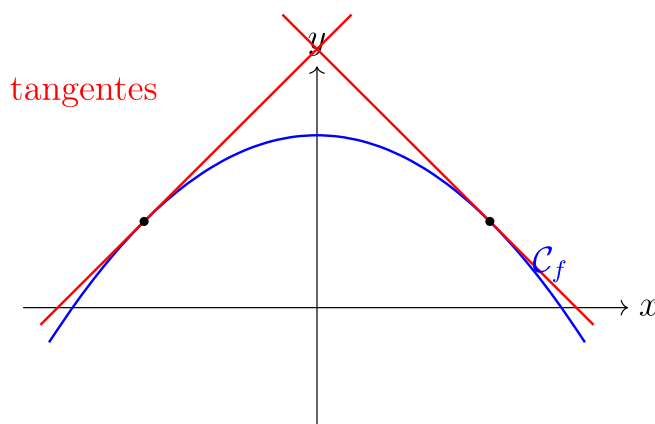
Définition

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- On dit que f est convexe sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes sur l'intervalle I .
- On dit que f est concave sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de toutes ses tangentes sur l'intervalle I .



La fonction est convexe : sa courbe reste au-dessus de chacune de ses tangentes.



La fonction est concave : sa courbe reste au-dessous de chacune de ses tangentes.

Remarque

Lorsque f est dérivable, cette caractérisation par les tangentes est **équivalente** à la définition par les cordes vue à la section précédente : une fonction convexe a sa courbe sous chacune de ses cordes et au-dessus de chacune de ses tangentes. C'est ce point de vue par les tangentes qui permet de relier la convexité aux variations de f' .

Théorème

Si f est dérivable sur I :

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I

Remarque

L'étude de la convexité se ramène donc à l'étude des variations de f' . Si f' est dérivable, on est donc amené à étudier le signe de la dérivée de f' . Cette dérivée s'appelle la dérivée seconde de f et se note f'' .

Théorème

Si f est dérivable sur I et si f' est dérivable sur I (on dit aussi que f est 2 fois dérivable sur I) :

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive ou nulle sur I
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative ou nulle sur I

Exemple

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x \text{ et } f''(x) = 2.$$

Comme f'' est positive sur $\mathbb{R}$, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

La fonction $g : x \mapsto x^3$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 \text{ et } g''(x) = 6x.$$

$g'' \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$, donc g est convexe sur $[0 ; +\infty[$.

$g'' \leq 0$ sur $] -\infty ; 0]$, donc g est concave sur $] -\infty ; 0]$.

3. Point d'inflexion



Définition

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I , $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $A(a; f(a))$ un point de la courbe $\mathcal{C}_f$.

On dit que A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$, si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en A .



Propriété

Si A est un point d'inflexion d'abscisse a , f passe de concave à convexe ou de convexe à concave en a .



Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Le point A d'abscisse a est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a .



Exemple

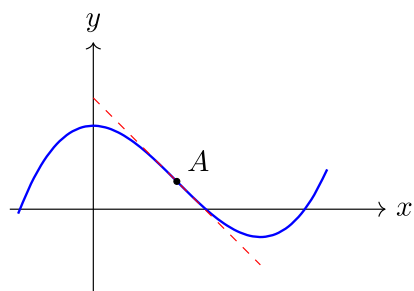
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$$

On a $f'(x) = x^2 - 2x$ et $f''(x) = 2x - 2$.

On vérifie que f'' s'annule et change de signe en 1. Donc le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée

$f(1) = \frac{1}{3}$ est un point d'inflexion.



Courbe de la fonction f et tangente au point d'inflexion A

Les questions essentielles

1. Comment calculer la dérivée seconde d'une fonction ?

On dérive d'abord la fonction f pour obtenir f' , puis on dérive à nouveau f' pour obtenir f'' . Les règles de dérivation usuelles s'appliquent à chaque étape.

Voir la fiche méthode : Calculer la dérivée seconde d'une fonction

2. Comment étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée ?

On calcule $f'(x)$, on étudie son signe sur l'intervalle d'étude, puis on en déduit le sens de variation : f est croissante là où $f' \geq 0$, décroissante là où $f' \leq 0$.

Voir la fiche méthode : Étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée

3. Comment étudier la convexité d'une fonction ?

On calcule la dérivée seconde $f''(x)$, puis on détermine son signe. Sur les intervalles où $f'' \geq 0$, f est convexe ; sur les intervalles où $f'' \leq 0$, f est concave.

Voir la fiche méthode : Étudier la convexité d'une fonction

4. Comment trouver un point d'inflexion ?

On cherche les valeurs de x pour lesquelles $f''(x) = 0$, puis on vérifie que f'' change de signe en ces valeurs. Si c'est le cas, le point $A(a ; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe.

Voir la fiche méthode : [Déterminer un point d'inflexion](#)

5. Comment lire la convexité d'une fonction sur un graphique ?

Selon la courbe fournie : sur la courbe de f , on repère les portions « en bol » (convexe) ou « en bosse » (concave) ; sur celle de f' , on suit ses variations ; sur celle de f'' , on observe son signe par rapport à l'axe des abscisses.

Voir la fiche méthode : [Lire graphiquement la convexité d'une fonction](#)