

Primitives et intégrales

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Déterminer une primitive d'une fonction usuelle

Déterminer une primitive d'une fonction composée

Calculer une intégrale

Calculer une aire sous une courbe

Calculer une aire entre deux courbes

Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Approcher une intégrale par la méthode des rectangles

1. Primitives d'une fonction



Définition

Soit f une fonction définie sur I .

On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I , si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.



Exemple

La fonction $F : x \mapsto x^2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $G : x \mapsto x^2 + 1$ est aussi une primitive de cette même fonction f .



Propriété

Si F est une primitive de f sur I , alors les autres primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque

Une fonction continue ayant une infinité de primitives, il ne faut pas dire *la* primitive de f mais *une* primitive de f .

Exemple

Les primitives de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sont les fonctions $F : x \mapsto x^2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Propriété

Si f et g sont deux fonctions définies sur I et admettant respectivement F et G comme primitives sur I et k un réel quelconque.

- $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I .
- kF est une primitive de la fonction kf sur I .

Propriété

Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous, k désigne un réel quelconque et I est un intervalle sur lequel la fonction f est définie.

Fonction f	Une primitive F	Intervalle I
$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Propriété

Primitives de fonctions composées

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Les primitives de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$ (où $k \in \mathbb{R}$).
- Les primitives de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur un intervalle où $u(x) > 0$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(u(x)) + k$.
- Pour tout entier $n \geq 1$, les primitives de $x \mapsto u'(x)(u(x))^n$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + k$.

Exemple

La fonction $x \mapsto 2xe^{(x^2)}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$.

Ses primitives sont donc les fonctions $x \mapsto e^{(x^2)} + k$ (où $k \in \mathbb{R}$).

2. Intégrales

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$. L'intégrale de a à b de f est le nombre réel noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Remarque

L'intégrale ne dépend pas de la primitive de f choisie.

En effet si G est une autre primitive de f , on a $G = F + k$ donc :

$$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

Définition

Notations

On note souvent : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

On obtient avec cette notation :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Exemple

La fonction F définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de la fonction carré.

On a donc :

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

Théorème

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie sur $[a; b]$ par :

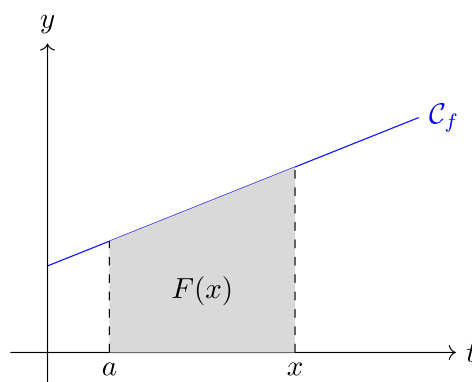
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f : pour tout x de $[a; b]$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque

Ce théorème justifie que toute fonction continue admet des primitives : la fonction « aire » $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ en est une.

Lorsque f est continue et positive, $F(x)$ est l'aire sous la courbe de f entre a et x . Quand x augmente d'une petite quantité, l'aire grise gagne une fine bande de hauteur $f(x)$: sa croissance instantanée est exactement $f(x)$, ce qui illustre $F'(x) = f(x)$.



3. Propriétés de l'intégrale



Propriété

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et $c \in [a; b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Propriété

Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$



Propriété

Comparaison d'intégrales

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ telles que $f \geq g$ sur $[a; b]$.

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$



Remarque

En particulier, en prenant pour g la fonction nulle on obtient si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

4. Interprétation graphique



Définition

Le plan P est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle unité d'aire (u.a.) l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent $||\vec{i}||$ et $||\vec{j}||$.



Propriété

Si f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par :

- la courbe $\mathcal{C}_f$
- l'axe des abscisses
- les droites (verticales) d'équations $x = a$ et $x = b$



Remarque

- Si f est négative sur $[a; b]$, la propriété précédente appliquée à la fonction $-f$ montre que $\int_a^b f(x)dx$ est égale à l'opposé de l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$
- Si le signe de f varie sur $[a; b]$, on découpe $[a; b]$ en sous-intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Propriété

Si f et g sont des fonctions continues et telles que $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors l'aire de la surface délimitée par :

- la courbe $\mathcal{C}_f$
- la courbe $\mathcal{C}_g$
- les droites (verticales) d'équations $x = a$ et $x = b$

est égale (en unités d'aire) à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

Définition

Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$. La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Exemple

La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[0; 3]$ est :

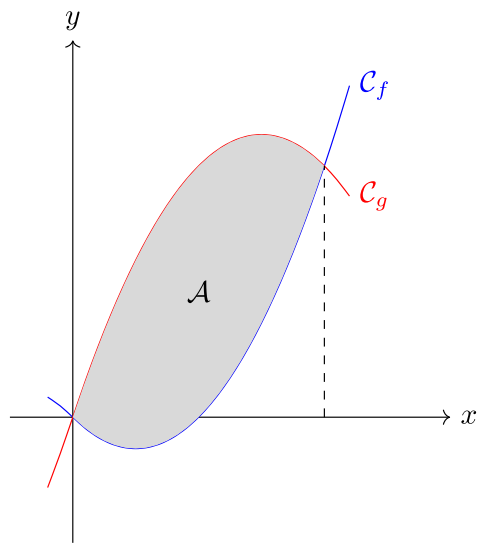
$$\mu = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \times \frac{27}{3} = 3$$

Exemple

f et g définies par $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = 3x - x^2$ sont représentées par les paraboles ci-dessous.

L'aire colorée est égale (en unités d'aire) à :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3} \text{ u.a.}$$



Aire comprise entre les courbes de f et g sur $[0; 2]$

Les questions essentielles

1. Comment déterminer une primitive d'une fonction usuelle ?

On identifie la forme de $f(x)$ (puissance, inverse, exponentielle...), on précise l'intervalle, puis on applique le tableau des primitives usuelles. La linéarité permet de traiter les sommes et produits par une constante.

Voir la fiche méthode : [Déterminer une primitive d'une fonction usuelle](#)

2. Comment reconnaître une primitive de fonction composée ?

On cherche à mettre f sous l'une des trois formes : $u' e^u$, $\frac{u'}{u}$ ou $u' u^n$. On ajuste si nécessaire le coefficient multiplicatif pour faire apparaître exactement u' .

Voir la fiche méthode : [Déterminer une primitive d'une fonction composée](#)

3. Comment calculer une intégrale ?

On détermine une primitive F de f , puis on applique $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. La linéarité et la relation de Chasles aident à simplifier le calcul.

Voir la fiche méthode : [Calculer une intégrale](#)

4. Comment calculer l'aire sous une courbe ?

On étudie d'abord le signe de f sur l'intervalle. Si $f \geq 0$, l'aire est l'intégrale ; si $f \leq 0$, c'est l'opposé de l'intégrale ; si f change de signe, on découpe avec Chasles.

Voir la fiche méthode : [Calculer une aire sous une courbe](#)

5. Comment calculer l'aire entre deux courbes ?

On étudie la position relative des deux courbes (signe de $g - f$), puis on intègre la différence (courbe du dessus moins courbe du dessous). Si la position s'inverse, on découpe avec Chasles.

Voir la fiche méthode : [Calculer une aire entre deux courbes](#)

6. Comment calculer la valeur moyenne d'une fonction ?

On applique la formule $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$: on calcule l'intégrale, puis on divise par la longueur de l'intervalle.

Voir la fiche méthode : [Calculer la valeur moyenne d'une fonction](#)

7. Comment approcher une intégrale par la méthode des rectangles ?

On découpe l'intervalle $[a; b]$ en sous-intervalles de même largeur, puis on somme les aires des rectangles construits sur chacun d'eux. Plus le nombre de rectangles est grand, plus l'approximation est précise.

Voir la fiche méthode : Approcher une intégrale par la méthode des rectangles