

# Vecteurs et coordonnées

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

## OBJECTIFS DU CHAPITRE

Montrer que 3 points sont alignés (vecteurs)

Calculer les coordonnées d'un vecteur

Calculer les coordonnées du milieu d'un segment

Calculer une distance entre deux points

Montrer que deux droites sont parallèles avec les coordonnées

## 1 - Repères et coordonnées

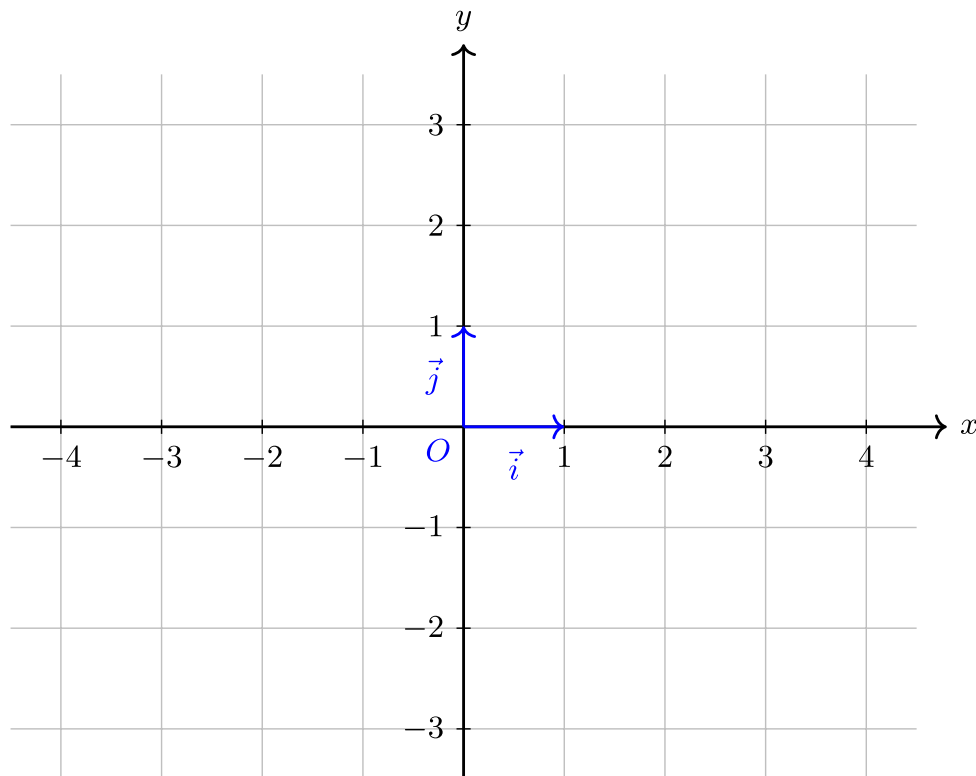
### Définition

Un **repère** du plan est déterminé par un point quelconque  $O$ , appelé **origine** du repère, et deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  non colinéaires.

## Définition

On dit que le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est :

- **orthogonal** : si les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux
- **orthonormé** ou **orthonormal** : si le repère est orthogonal et si les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  ont la même norme.



*Repère orthonormé*

## 2 - Coordonnées d'un vecteur

### Définition

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan.

On dit que  $M$  a pour **coordonnées**  $(x; y)$  si et seulement si :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On dit que  $\vec{u}$  a pour **coordonnées**  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  si et seulement si :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Par la suite, on considère que le plan  $P$  est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### Propriété

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **égaux** si et seulement si ils ont les **mêmes coordonnées**.

## Propriété

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ . Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

## Exemple

Soient  $A(1; 1)$ ,  $B(4; 2)$ ,  $C(5; 0)$ ,  $D(2; -1)$

Les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  sont  $\begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de  $\overrightarrow{DC}$  sont  $\begin{pmatrix} 5-2 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  donc  $ABCD$  est un parallélogramme (voir [Généralités sur les vecteurs](#)).

### 3 - Opérations sur les coordonnées

#### Propriété

Soient deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

- Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- Le vecteur  $k\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

### 4 - Colinéarité et déterminant

#### Définition

Soient deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  dans un repère orthonormé.

On appelle **déterminant** des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le nombre réel noté  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$$

## Propriété

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ , c'est-à-dire :

$$xy' - yx' = 0$$

[preuve]

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs non nuls.

**Sens direct :** si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{v} = k\vec{u}$ , c'est-à-dire  $x' = kx$  et  $y' = ky$ .

Alors  $xy' - yx' = x(ky) - y(kx) = kxy - kxy = 0$ .

**Réciproque :** supposons que  $xy' - yx' = 0$ , c'est-à-dire  $xy' = yx'$ .

Si  $x \neq 0$  : on pose  $k = \frac{x'}{x}$ . Alors  $x' = kx$  et  $xy' = yx' = ykx$  donc  $y' = ky$  (car  $x \neq 0$ ). On a bien  $\vec{v} = k\vec{u}$ .

Si  $x = 0$  : comme  $\vec{u}$  est non nul, on a  $y \neq 0$ . L'égalité  $xy' = yx'$  donne  $0 = yx'$  donc  $x' = 0$ . On pose alors  $k = \frac{y'}{y}$  et on a  $\vec{v} = k\vec{u}$ .

Dans tous les cas,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

[/preuve]

### Application

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 6 - (-3) \times (-4) = 12 - 12 = 0$$

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont donc colinéaires.

On peut vérifier :  $\vec{v} = -2\vec{u}$ .

## 5 - Milieu d'un segment

### Propriété

Si  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ , le milieu  $M$  de  $[AB]$  a pour coordonnées :

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

## 6 - Norme et distance

### Propriété

Soit un vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On en déduit si  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### Exemple

Soient  $A(1; 0)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(0; 2)$ .

Que peut-on dire du triangle  $ABC$  ?

$$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Donc  $AB = AC$ .

De plus :

$$AB^2 + AC^2 = 5 + 5 = 10$$

$$BC^2 = 10$$



Le triangle  $ABC$  est donc rectangle en  $A$  (réciproque du théorème de Pythagore) et isocèle.

## Les questions essentielles

### 1. Comment calculer les coordonnées d'un vecteur ?

Pour calculer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , on fait la différence « arrivée moins départ » :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

Voir la fiche méthode : [Calculer les coordonnées d'un vecteur](#)

### 2. Comment montrer que trois points sont alignés ?

On calcule les coordonnées de deux vecteurs ayant un point en commun, puis on vérifie que leur déterminant est nul (ce qui prouve la colinéarité).

Voir la fiche méthode : [Montrer que 3 points sont alignés](#)

### 3. Comment calculer les coordonnées du milieu d'un segment ?

On utilise la formule du milieu :  $I \left( \frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ . On peut aussi retrouver un point symétrique connaissant le milieu.

Voir la fiche méthode : [Calculer les coordonnées du milieu d'un segment](#)

#### 4. Comment calculer la distance entre deux points ?

Dans un repère orthonormé, on utilise la formule :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ . Cette formule permet aussi de déterminer la nature d'un triangle.

Voir la fiche méthode : [Calculer une distance entre deux points](#)

#### 5. Comment montrer que deux droites sont parallèles avec les coordonnées ?

On détermine un vecteur directeur de chaque droite, puis on calcule le déterminant. Si le déterminant est nul, les droites sont parallèles.

Voir la fiche méthode : [Montrer que deux droites sont parallèles](#)

📄 Télécharger en PDF