PROBABILITÉS EN SECONDE

COURS

Probabilités en Seconde

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Utiliser l'événement contraire pour calculer une probabilité
- Calculer une probabilité d'union avec la formule p(A∪B)
- Utiliser un tableau à double entrée pour calculer une probabilité
- Utiliser un arbre des possibles pour dénombrer les issues

1 - Expérience aléatoire

Définition

Une expérience **aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard.
L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

On le note en général Ω.

Définition

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω.

Chacun des résultats possibles s'appelle une **éventualité** (ou un **événement élémentaire** ou une **issue**).

On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω.

Un événement est donc constitué de zéro, une ou plusieurs éventualités.

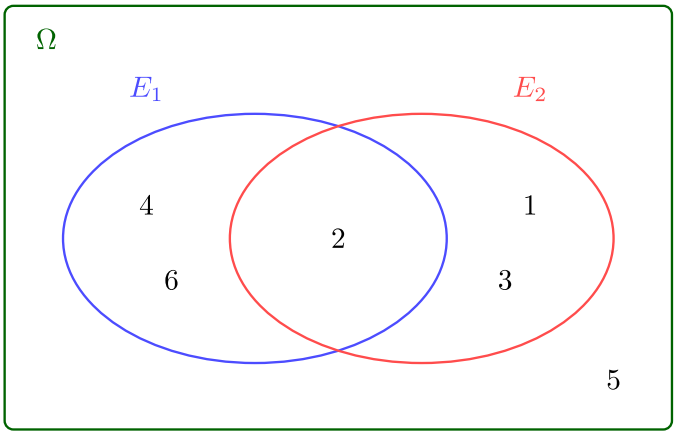
Exemple

Le lancer d'un dé à six faces est une expérience aléatoire d'univers :

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

- L'ensemble $E_1 = \{2; 4; 6\}$ est un événement. En français, cet événement peut se traduire par la phrase : « *le résultat du dé est un nombre pair* »
- L'ensemble $E_2 = \{1; 2; 3\}$ est un autre événement. Ce second événement peut se traduire par la phrase : « *le résultat du dé est strictement inférieur à 4* »

Ces événements peuvent être représentés par un diagramme de Venn :



Définition

- L'**événement impossible** est la partie vide, noté $\varnothing$, lorsque aucune issue ne le réalise.
- L'**événement certain** est Ω, lorsque toutes les issues le réalisent.
- L'**événement contraire** de A noté $\overline{A}$ est l'ensemble des éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A.
- L'événement $A \cup B$ (lire « A union B » ou « A **ou** B ») est constitué des éventualités qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles.
- L'événement $A \cap B$ (lire « A inter B » ou « A **et** B ») est constitué des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B.

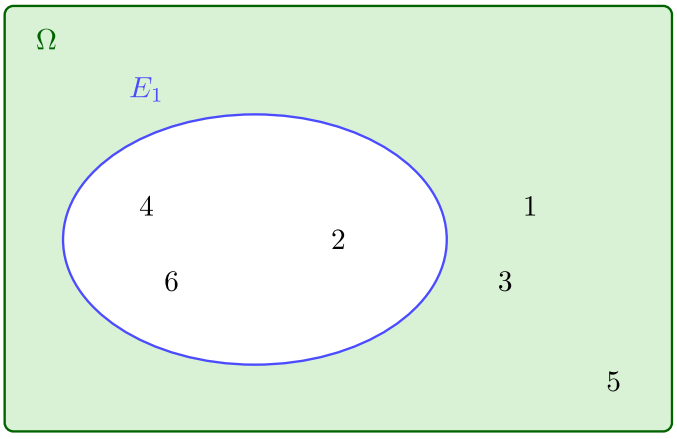
Exemple

On reprend l'exemple précédent avec :
$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

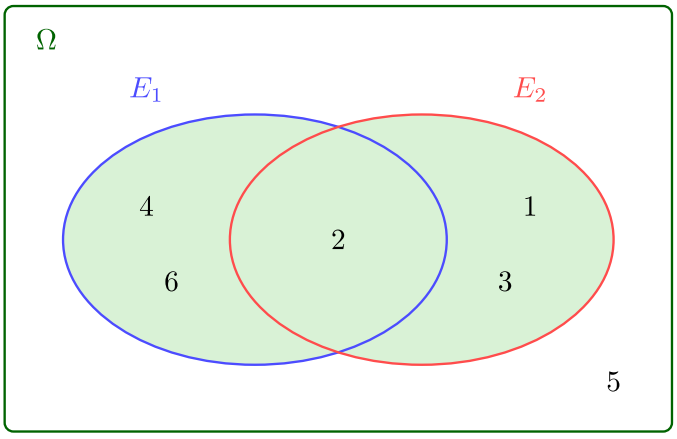
$E_1 = \{2; 4; 6\}$

$E_2 = \{1; 2; 3\}$

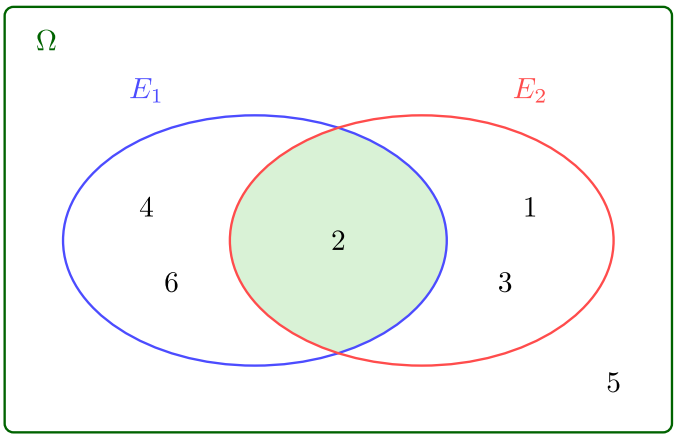
- L'événement « obtenir un nombre supérieur à 7 » est l'événement impossible.
- L'événement « obtenir un nombre entier » est l'événement certain.
- $\overline{E_1} = \{1; 3; 5\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est un nombre impair » :



- $E_1 \cup E_2 = \{1; 2; 3; 4; 6\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est pair **ou** strictement inférieur à 4 » :



- $E_1 \cap E_2 = \{2\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est pair **et** strictement inférieur à 4 » :



Définition

On dit que A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Deux événements sont incompatibles lorsqu'aucune issue ne les réalise simultanément.

Remarque

Deux événements contraires sont incompatibles mais deux événements peuvent être incompatibles sans être contraires.

Exemple

« Obtenir un chiffre inférieur à 2 » et « obtenir un chiffre supérieur à 4 » sont deux événements incompatibles.

2 - Probabilités

Définition

La probabilité d'un événement élémentaire est un nombre réel tel que :

- Ce nombre est compris entre 0 et 1
- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de l'univers vaut 1

Définition

Définir une **loi de probabilité** sur un univers $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$, c'est associer à chaque issue e_i un nombre réel p_i appelé **probabilité** de e_i, tel que :

- pour tout i, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$
- $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

On résume la loi de probabilité dans un **tableau** :

Issue	e_1	e_2	$\ldots$	e_n
Probabilité	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Exemple

On lance un dé truqué un grand nombre de fois et on observe les fréquences suivantes :

Issue	1	2	3	4	5	6
Fréquence	$0{,}10$	$0{,}15$	$0{,}20$	$0{,}20$	$0{,}15$	$0{,}20$

On choisit la loi de probabilité suivante pour modéliser cette expérience :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,2$	$0,15$	$0,2$

On vérifie que la somme des probabilités vaut $0,1+0,15+0,2+0,2+0,15+0,2=1$.

Remarque

Une loi de probabilité peut être définie de deux manières :

- **À partir d'un modèle théorique** : on suppose l'équiprobabilité (par exemple pour un dé non truqué ou un tirage au sort). Les probabilités sont fixées a priori.
- **À partir de fréquences observées** : en répétant l'expérience un grand nombre de fois, les fréquences se stabilisent et servent d'estimation des probabilités.

Il est important de bien distinguer le modèle probabiliste de la réalité.

Propriété

- $p(\varnothing)=0$
- $p(\Omega)=1$
- $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$

Exemple

On lance un dé à six faces. On note S l'événement « obtenir un 6 ». On suppose que le dé est bien équilibré et que la probabilité de S est de $\frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir un résultat différent de 6 est alors :

$$p\left(\overline{S}\right)=1-p(S)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Théorème

Quels que soient les événements A et B de Ω :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

En particulier, si A et B sont **incompatibles** :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Définition

Deux événements qui ont la même probabilité sont dits **équiprobables**.
Lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Exemple

Un lancer d'un dé non truqué est une situation d'équiprobabilité.

Propriété

On suppose que l'univers est composé de n événements élémentaires.

- Dans le cas d'équiprobabilité, chaque événement élémentaire a pour probabilité : $\frac{1}{n}$
- Si un événement A de Ω est composé de m événements élémentaires, alors :

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple

On reprend l'exemple du lancer d'un dé avec E_1 : « le résultat du dé est un nombre pair ».

$$p(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3 - Dénombrer les issues

Utiliser un tableau à double entrée

Lorsqu'une expérience combine deux caractères, on peut organiser les données dans un **tableau à double entrée**.
Les lignes représentent un caractère, les colonnes l'autre. La dernière ligne et la dernière colonne contiennent les totaux.
Ce tableau permet de dénombrer les issues et de calculer les probabilités.

Exemple

Dans un lycée, 120 élèves choisissent une option (Sport ou Musique) et une langue (Anglais ou Espagnol) :

	Anglais	Espagnol	Total
Sport	40	30	70
Musique	25	25	50
Total	65	55	120

On choisit un élève au hasard. On note S l'événement « l'élève fait Sport » et A l'événement « l'élève fait Anglais ».
La probabilité qu'il fasse Sport et Anglais est :

$$p(S \cap A) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

En utilisant la formule de l'union :

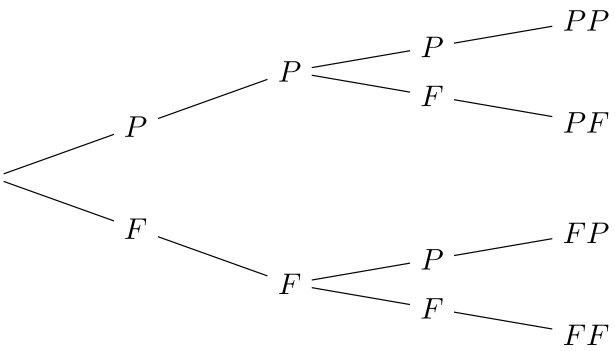
$$p(S \cup A) = p(S) + p(A) - p(S \cap A) = \frac{70}{120} + \frac{65}{120} - \frac{40}{120} = \frac{95}{120} = \frac{19}{24}$$

Utiliser un arbre

Pour dénombrer les issues d'une expérience aléatoire à **deux ou trois épreuves successives**, on utilise un **arbre**.
Chaque embranchement représente les résultats possibles d'une épreuve. Les issues de l'expérience complète sont les chemins de l'arbre, de la racine jusqu'aux extrémités.

Exemple

On lance une pièce de monnaie équilibrée deux fois de suite. On note P (Pile) et F (Face).



L'univers est $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$. Il contient $2 \times 2 = 4$ issues équiprobables, chacune de probabilité $\frac{1}{4}$.
L'événement A : « obtenir au moins un Pile » est composé de 3 issues : $A = \{PP; PF; FP\}$.

$$p(A) = \frac{3}{4}$$

Exemple

On lance un dé équilibré et une pièce de monnaie équilibrée simultanément.
L'univers contient $6 \times 2 = 12$ issues équiprobables.
On note B l'événement « obtenir un nombre pair et Pile ». Cet événement est composé de 3 issues : $(2; P)$, $(4; P)$ et $(6; P)$.

$$p(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Les questions essentielles

1. Comment calculer une probabilité dans un cas d'équiprobabilité ?

On dénombre le nombre de cas possibles (issues équiprobables de l'univers Ω) et le nombre de cas favorables à l'événement, puis on applique la formule $p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

2. Comment utiliser l'événement contraire pour calculer une probabilité ?

Lorsque l'événement cherché contient « au moins un », son contraire (« aucun ») est souvent plus simple à dénombrer. On calcule $p(\overline{A})$ puis on applique $p(A) = 1 - p(\overline{A})$.

Voir la fiche méthode : Utiliser l'événement contraire pour calculer une probabilité

3. Comment calculer la probabilité d'une union $p(A \cup B)$?

On applique la formule du crible : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Si les événements sont incompatibles ($A \cap B = \varnothing$), la formule se simplifie en $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Voir la fiche méthode : Calculer une probabilité d'union avec la formule p(A ou B)

4. Comment utiliser un tableau à double entrée pour calculer une probabilité ?

On croise deux caractères en ligne et en colonne, on remplit les effectifs puis on vérifie les totaux. Chaque case donne l'effectif d'une intersection, ce qui permet de calculer les probabilités d'intersection et d'union.

Voir la fiche méthode : Utiliser un tableau à double entrée pour calculer une probabilité

5. Comment utiliser un arbre pour dénombrer les issues d'une expérience à plusieurs épreuves ?

On construit un arbre des possibles : chaque niveau représente une épreuve, chaque chemin complet correspond à une issue. On compte les chemins favorables et on applique la formule d'équiprobabilité.

Voir la fiche méthode : Utiliser un arbre des possibles pour dénombrer les issues