

Pourcentages

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Maîtriser les calculs de base sur les pourcentages

Calculer un taux d'évolution (Variation en %)

Comment calculer une valeur finale après une augmentation ou une baisse ?

Retrouver une valeur initiale (prix de départ)

Comment calculer une évolution globale (successive) ?

1. Part en pourcentage

Définition

Soit E un ensemble fini (que l'on appellera **ensemble de référence**) et F une partie de l'ensemble E . La **part en pourcentage** de F par rapport à E

est le nombre : $t\% = \frac{t}{100} = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(E)}$

où $\text{card}(E)$ (cardinal de E) désigne le nombre d'éléments de E et $\text{card}(F)$ le nombre d'éléments de F .

Remarque

- 5% , $\frac{5}{100}$ et $0,05$ sont trois écritures différentes du **même nombre** (pourcentage, fraction, écriture décimale).
- On est en présence d'une situation de proportionnalité que l'on peut représenter par le tableau suivant :

t	nombre d'éléments de F
100	nombre d'éléments de E

- Ceci peut également s'écrire : nombre d'éléments de $F = \frac{t}{100} \times$
nombre d'éléments de E .

Cette dernière égalité permet de calculer le nombre d'éléments de F connaissant sa part en pourcentage par rapport à E

Exemple

- Dans une classe de 25 élèves qui compte 15 garçons le pourcentage de garçons est :

$$\frac{15}{25} = 0,6 = \frac{60}{100} = 60\%$$

- 16% de 75€ font : $\frac{16}{100} \times 75 = 12\text{€}$

Propriété

Pourcentages de pourcentages Soit 3 ensembles E, F, G tels que $G \subset F \subset E$.

Si G représente $t_1\%$ de F et si F représente $t_2\%$ de E , la part en pourcentage de G par rapport à E est :

$$\frac{t}{100} = \frac{t_1}{100} \times \frac{t_2}{100}$$

Exemple

Dans un lycée de 800 élèves :

- 25 % des élèves sont en Seconde ;
- 45 % des élèves de Seconde sont des filles.

La part des filles de Seconde dans le lycée est :

$$\frac{t}{100} = \frac{25}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{1125}{10000} = \frac{11,25}{100} = 11,25\%$$

Le nombre de filles en Seconde est $\frac{11,25}{100} \times 800 = 90$

2. Pourcentages d'évolution

On considère une quantité qui passe d'une valeur V_0 à une valeur V_1 . Pour mesurer ce changement, on dispose de deux outils : la **variation absolue** (exprimée dans l'unité de la grandeur) et le **taux d'évolution** (exprimé en pourcentage).

Définition

La **variation absolue** d'une quantité passant de V_0 à V_1 est la différence :

$$\Delta V = V_1 - V_0$$

Elle s'exprime dans la même unité que la grandeur étudiée.

Remarque

La variation absolue est **positive** en cas d'**augmentation** et **négative** en cas de **diminution**. Seule, elle ne permet pas de comparer des évolutions portant sur des grandeurs d'ordres de grandeur différents : une augmentation de 100€ sur un prix de 200€ n'a pas la même signification qu'une augmentation de 100€ sur un prix de 10 000€.

Définition

Le **taux d'évolution** (ou **variation relative**) d'une quantité passant de V_0 à V_1 est le nombre :

$$\frac{t}{100} = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Remarque

Le taux d'évolution est **positif** dans le cas d'une **augmentation** et **négatif** dans le cas d'une **diminution**.

Exemple

Le prix d'un article passe de 80€ à 76€.

La variation absolue est : $\Delta V = 76 - 80 = -4\text{€}$. Le prix a diminué de 4€.

Le taux d'évolution est : $\frac{t}{100} = \frac{76 - 80}{80} = -\frac{4}{80} = -0,05 = -5\%$

Le prix de l'article a diminué de 5%.

Définition

On considère une quantité passant d'une valeur V_0 à une valeur V_1 .

Le **coefficient multiplicateur** est le nombre par lequel il faut multiplier V_0 pour obtenir V_1 :

$$V_1 = CM \times V_0$$

Remarque

- On a donc $CM = \frac{V_1}{V_0}$
- Le coefficient multiplicateur est **supérieur à 1** dans le cas d'une **augmentation** et **inférieur à 1** dans le cas d'une **diminution**.
- La fonction qui à l'ancienne valeur associe la nouvelle valeur est :
 $x \mapsto CM \times x$

C'est une **fonction linéaire** de coefficient directeur CM

Propriété

Le coefficient multiplicateur s'exprime en fonction du pourcentage d'évolution par :

$$CM = 1 + \frac{t}{100}$$

(où t est positif en cas d'augmentation, négatif en cas de diminution)

Remarque

- On a donc : $V_1 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) V_0$.
- Dans le cas d'une diminution de 5%, par exemple, on pourra au choix considérer que :

$$CM = 1 + \frac{t}{100} \text{ avec } t = -5$$

ou

$$CM = 1 - \frac{t}{100} \text{ avec } t = 5$$

Dans les deux raisonnements, on obtient évidemment le même coefficient multiplicateur 0,95.

- Connaissant le coefficient multiplicateur, on a facilement le pourcentage d'évolution grâce à la relation : $\frac{t}{100} = CM - 1$
- Le tableau ci-dessous résume les différents cas :

Calculs à effectuer	Multiplier x par $\frac{t}{100}$	Multiplier x par $1 + \frac{t}{100}$	Multiplier x par $1 - \frac{t}{100}$
Fonction linéaire	$x \mapsto \frac{t}{100} \times x$	$x \mapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times x$	$x \mapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times x$

Exemple

	Prendre 25% de x	Augmenter x de 25%	Diminuer x de 25%
Calculs à effectuer	Multiplier x par $\frac{25}{100}$	Multiplier x par 1,25	Multiplier x par 0,75
Fonction linéaire	$x \mapsto 0,25 \times x$	$x \mapsto 1,25 \times x$	$x \mapsto 0,75 \times x$
Exemples	Prendre 25% de 200	Augmenter 50 de 25%	Diminuer 50 de 25%
Résultat	$0,25 \times 200 = 50$	$1,25 \times 50 = 62,5$	$0,75 \times 50 = 37,5$

Propriété (Évolutions successives)

Lors d'évolutions successives, le coefficient multiplicateur global est égal au **produit** des coefficients multiplicateurs de chaque évolution

Exemple

Le prix d'un objet augmente de 10% puis diminue de 10%.

Le coefficient multiplicateur global est :

$$CM = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 0,99$$

Si t désigne le pourcentage d'évolution global en %, on a donc :

$$1 + \frac{t}{100} = 0,99$$

$$\frac{t}{100} = 0,99 - 1 = -0,01 = -\frac{1}{100}$$

Le prix de l'objet a globalement **diminué** de 1%.

Remarque

- Une hausse de $t\%$ ne « compense » pas une baisse de $t\%$. C'est dû au fait que les deux pourcentages ne portent pas sur le même montant.

En effet, si un objet coûtant 100 euros subit une augmentation de 10% son prix passera à 110€ (les 10% ont été calculé par rapport à 100€).

Si son prix subit ensuite une diminution de 10%, le montant de la baisse sera calculé par rapport au prix de 110€ et non plus de 100€. La baisse sera donc de 11€ et non 10€.

- En cas d'évolutions successives, les pourcentages d'évolutions ne s'ajoutent (ni ne soustraient) jamais.

Définition et propriété (Taux d'évolution réciproque)

Si le taux d'évolution $t\%$ fait passer de V_0 à V_1 , on appelle taux d'évolution réciproque $t'\%$, le taux d'évolution qui fait passer de V_1 à V_0 .

On a alors la relation suivante :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(1 + \frac{t'}{100}\right) = 1$$

Exemple

Le prix d'un article augmente de 60%. Pour qu'il revienne à son prix de départ, il faut qu'ensuite il varie de $t'\%$ tel que :

$$\left(1 + \frac{60}{100}\right) \left(1 + \frac{t'}{100}\right) = 1$$

$$1,6 \times \left(1 + \frac{t'}{100}\right) = 1$$

$$1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1,6}$$

$$1 + \frac{t'}{100} = 0,625$$

$$\frac{t'}{100} = -0,375$$

$$t' = -37,5$$

Il faut donc que le prix diminue de 37,5% pour compenser la hausse de 60%.

Les questions essentielles

1. Comment calculer une proportion ou appliquer un pourcentage ?

C'est la base du chapitre. Il y a deux situations :

- **Prendre un pourcentage (calculer une part) :** on multiplie le total par $\frac{t}{100}$. Exemple : 20% de 500€ se calcule par $500 \times 0,20 = 100\text{€}$.
- **Trouver un pourcentage (calculer un taux) :** on divise la partie par le total. Exemple : 5 élèves sur 25 représente $\frac{5}{25} = 0,20 = 20\%$.

Voir la fiche méthode : [Calculer une proportion ou un pourcentage](#)

2. Comment calculer le taux d'évolution entre deux valeurs ?

Pour savoir de quel pourcentage une valeur a augmenté ou diminué, on utilise la formule du taux d'évolution : $\frac{V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}}{V_{\text{départ}}}$

. Exemple : une note passe de 10 à 12, donc $\frac{12 - 10}{10} = 0,20$, soit une augmentation de 20%.

Voir la fiche méthode : [Calculer un taux d'évolution](#)

3. Comment calculer un prix après une augmentation ou une réduction ?

Pour calculer une valeur finale, le plus rapide est d'utiliser le **coefficient multiplicateur (CM)**. Pour une hausse de $t\%$:

$$CM = 1 + \frac{t}{100}. \text{ Pour une baisse de } t\% : CM = 1 - \frac{t}{100}.$$

Exemple : un pull à 50€ soldé à -20% coûte $50 \times 0,80 = 40\text{€}$.

Voir la fiche méthode : [Calculer une valeur finale](#)

4. Comment retrouver la valeur initiale avant une évolution ?

C'est une erreur classique : **il ne faut jamais soustraire le pourcentage** au prix final. Pour revenir en arrière, on **divise la valeur finale par le coefficient multiplicateur**. Exemple : un article coûte 120€ après une hausse de 20% , son prix initial est

$$\frac{120}{1,20} = 100\text{€}.$$

Voir la fiche méthode : [Retrouver une valeur initiale](#)

5. Peut-on additionner les pourcentages lors d'évolutions successives ?

Non, les pourcentages ne s'additionnent jamais. Il faut multiplier les coefficients multiplicateurs entre eux. Exemple : une hausse de

10% suivie d'une autre hausse de 10% donne $1,10 \times 1,10 = 1,21$, soit une évolution globale de +21% (et non +20%).

Voir la fiche méthode : [Calculer une évolution globale](#)

 Télécharger en PDF