

Ensembles de nombres – Intervalles – Valeurs absolues

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Trouver le plus petit ensemble de nombres

Passer des inégalités aux intervalles

Union et intersection d'intervalles

Résoudre graphiquement une inéquation avec valeurs absolues

Résoudre graphiquement une équation avec des valeurs absolues

I – Les ensembles de nombres

Définition

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$ est l'ensemble des **entiers naturels**.

Remarque

On emploie le signe $\in$ pour indiquer qu'un nombre appartient à un ensemble.

On écrira par exemple : $2 \in \mathbb{N}$ et $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$.

Définition

$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**.

Définition

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombre décimaux**. Les nombres décimaux peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (1 ; 10 ; 100 ; 1 000 ; ...).

Ils peuvent aussi s'écrire sous forme décimale dont le nombre de chiffres après la virgule est fini.

Remarque

- « *fini* » signifie ici « qui n'est pas infini ».
- Les calculatrices les plus simples ne manipulent que des nombres décimaux pour effectuer les calculs. Certaines permettent des opérations sur les fractions. Quelques modèles plus avancés (effectuant

du « calcul formel ») peuvent également effectuer des calculs avec des nombres irrationnels.

Définition

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**. Les nombres rationnels peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers relatifs.

Définition

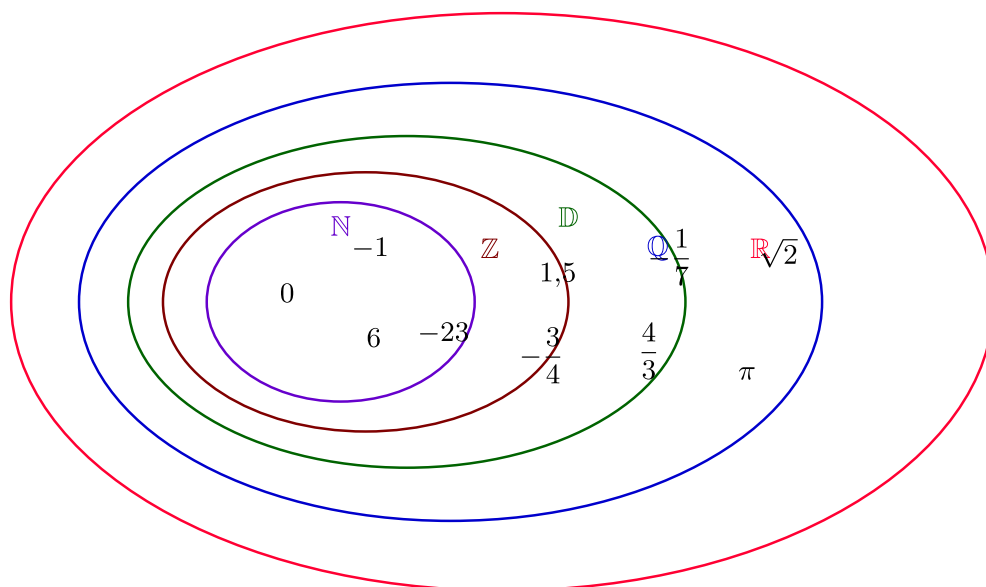
$\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**. Les nombres réels sont tous les nombres connus (en Seconde...).

Remarque

Les nombres réels qui ne sont pas rationnels (comme π ou $\sqrt{2}$) sont appelés des nombres **irrationnels**.

Propriété

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



i Remarque

- Le symbole $\subset$ se lit « *inclus dans* ».
- La proposition précédente signifie que tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs qui sont eux-mêmes des nombres décimaux qui sont des nombres rationnels qui sont des nombres réels.
- Un même nombre admet plusieurs écritures différentes. Par exemple le nombre 2 peut aussi s'écrire 2,0 (écriture décimale) $\frac{2}{1}$ ou $\frac{4}{2}$ etc. (écriture fractionnaire) $\sqrt{4}$ (écriture avec un radical) et même (aussi curieux que cela puisse vous paraître) 1,999999... (écriture décimale illimitée).

II – Intervalles

Intervalles bornés

Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

- L'intervalle **fermé** $[a ; b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.
- L'intervalle **ouvert** $]a ; b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$.
- L'intervalle $[a ; b[$ (fermé en a , ouvert en b) est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$.
- L'intervalle $]a ; b]$ (ouvert en a , fermé en b) est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leq b$.

Exemple

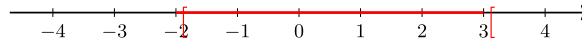
Par exemple, l'intervalle $[-2 ; 3[$ est constitué des nombres réels qui sont à la fois supérieur ou égal à -2 et strictement inférieur à 3 .

On pourra, par exemple, écrire :

- $-3 \notin [-2 ; 3[$
- $-2 \in [-2 ; 3[$
- $0 \in [-2 ; 3[$
- $3 \notin [-2 ; 3[$

- $4 \notin [-2 ; 3[$

On peut représenter l'intervalle $[-2 ; 3[$ de la façon suivante :



Intervalles non bornés

Définition

Soit a un nombre réel.

- L'intervalle $[a ; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.
- L'intervalle $]a ; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.
- L'intervalle $]-\infty ; a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq a$.
- L'intervalle $]-\infty ; a[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$.

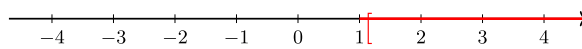
Remarque

En $+\infty$ et en $-\infty$, le crochet est toujours **ouvert**.

Exemple

- $0 \notin [1 ; +\infty[$
- $1 \in [1 ; +\infty[$
- $100 \in [1 ; +\infty[$

On représente l'intervalle $[1 ; +\infty[$ ainsi :



Union et intersection

Définition

Soient I et J deux intervalles.

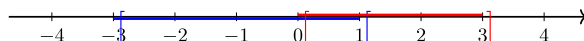
- L'**intersection** de I et de J notée $I \cap J$ (lire « I inter J ») est l'ensemble des nombres appartenant à la fois à I **et** à J .
- L'**union** (ou la **réunion** de I et de J notée $I \cup J$ (lire « I union J ») est l'ensemble des nombres appartenant à I **ou** à J **ou** aux deux intervalles.

Remarque

Retenir que l'**intersection** correspond au mot « **et** » et que la **réunion** correspond au mot « **ou** ».

Exemple

Si $I = [-3 ; 1[$ et $J = [0 ; 3]$, I est représenté en bleu et J en rouge sur la figure suivante :



$$I \cap J = [0 ; 1[\text{ et } I \cup J = [-3 ; 3]$$

III – Valeurs absolues

Intuitivement, la valeur absolue d'un nombre c'est « le nombre sans son signe. ». Par exemple, la valeur absolue de -5 est 5 et la valeur absolue de $1,12$ est $1,12$. Toutefois, lors de calculs littéraux, le signe peut être « caché » à l'intérieur de la lettre ; par exemple, on ne peut pas dire que la valeur absolue de $-x$ est égale à x car c'est faux si x est négatif. D'où la définition suivante :

Définition

Soit x un nombre réel

On appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le nombre réel positif ou nul défini par

- $|x| = x$ si x est positif ou nul,
- $|x| = -x$ si x est négatif ou nul.

Exemple

- $|-1| = -(-1) = 1$
- $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$ car $\sqrt{2} > 1$ donc $\sqrt{2}-1$ est positif.

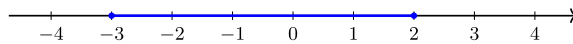
Propriété

La distance entre les nombres réels x et y est égale à $|y-x|$ (ou aussi à $|x-y|$).

En particulier, $|x|$ est la distance de x à 0.

Exemple

Les nombres -3 et 2 sont représentés sur l'axe ci-dessous :



La distance entre -3 et 2 est égale à :

$$|-3-2| = |-5| = 5$$

La distance entre -3 et 0 est égale à :

$$|-3| = 3$$

Les questions essentielles

1. Comment déterminer le plus petit ensemble de nombres usuels ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) auquel appartient un nombre ?

Il est **indispensable de simplifier l'écriture du nombre** au maximum avant de conclure.

- Ne vous fiez pas à l'apparence : une fraction peut cacher un nombre entier (ex : $\frac{10}{2} = 5 \in \mathbb{N}$).
- Un nombre peut appartenir à plusieurs ensembles, mais on cherche toujours le « plus petit » (celui qui est le plus restrictif).

Voir la fiche méthode : [Identifier l'ensemble d'un nombre](#)

2. Comment traduire une inégalité en un intervalle ?

La conversion dépend essentiellement du sens des crochets, qui est dicté par le signe de l'inégalité :

- **Inégalité stricte ($<$ ou $>$)** : Le crochet est **ouvert** (tourné vers l'extérieur). La valeur n'est pas comprise.

- **Inégalité large ($\leq$ ou $\geq$)** : Le crochet est **fermé** (tourné vers l'intérieur). La valeur est comprise.

Exemple : $x \geq 3$ devient l'intervalle $[3 ; +\infty[$.

Voir la fiche méthode : [Traduire inégalités et intervalles](#)

3. Comment représenter l'intersection ($\cap$) ou l'union ($\cup$) de deux intervalles ?

La méthode visuelle est la plus sûre : dessinez une droite graduée et coloriez chaque intervalle d'une couleur différente.

- **Intersection ($\cap$)** : C'est la zone où les deux couleurs **se superposent** (ce qui est commun aux deux).
- **Union ($\cup$)** : C'est la zone recouverte par **au moins une** des couleurs (tout ce qui a été colorié).

Voir la fiche méthode : [Union et intersection d'intervalles](#)

4. Comment résoudre une équation de type $|x-a| = r$?

Pensez « distance » ! Géométriquement, $|x-a|$ représente la distance entre le point x et le point a . On cherche donc les points situés exactement à une distance r du centre a .

- Il y a généralement deux solutions : une à droite ($a + r$) et une à gauche ($a - r$).

Voir la fiche méthode : [Équations avec valeur absolue](#)

5. Comment résoudre une inéquation de type $|x - a| \leq r$?

Cela revient à chercher tous les points dont la distance au centre a est plus petite que le rayon r .

- **Graphiquement** : C'est tout le segment centré en a et de rayon r .
- **Résultat** : Cela correspond à l'intervalle $[a - r ; a + r]$.

Voir la fiche méthode : [Inéquations avec valeur absolue](#)

↓ Télécharger en PDF