

La fonction inverse et la fonction racine carrée

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

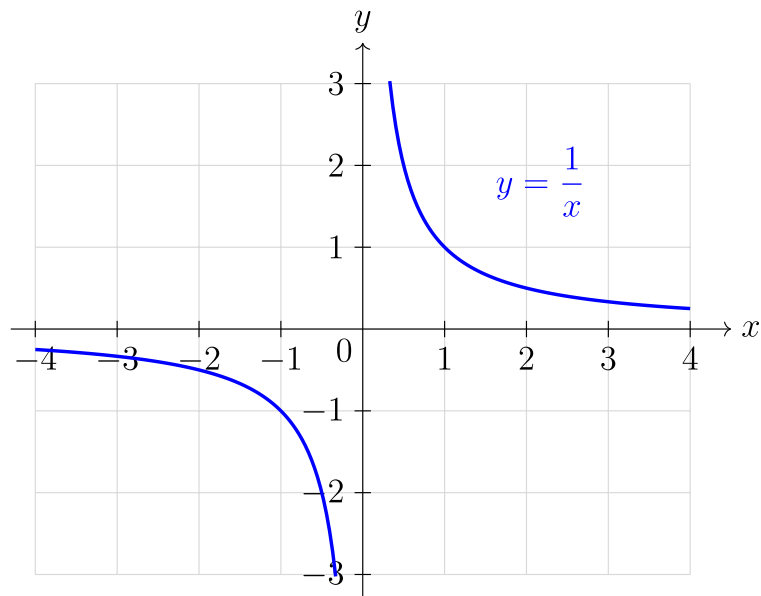
1 - La fonction inverse

Définition

La fonction **inverse** est la fonction définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par :

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Sa courbe représentative est une **hyperbole**.



Propriété

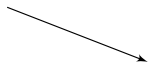
La courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque

Les nombres x et $\frac{1}{x}$ sont toujours de même signe : l'hyperbole est située dans le premier quadrant (quand $x > 0$) et dans le troisième quadrant (quand $x < 0$).

Propriété

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et sur $] -\infty; 0[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

Attention

La fonction inverse n'est **pas** décroissante sur son ensemble de définition tout entier. Par exemple, $-2 < 3$ mais $\frac{1}{-2} < \frac{1}{3}$: l'ordre n'est pas inversé ici car -2 et 3 ne sont pas de même signe.

On ne peut comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ grâce à la décroissance de la fonction inverse que si a et b sont **de même signe**.

Comparaison de nombres

On veut comparer $\frac{1}{\pi}$ et $\frac{1}{3}$.

On sait que $\pi > 3 > 0$. Comme 3 et π sont strictement positifs et que la

fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit que

$$\frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}.$$

Encadrement

On sait que $2 \leq x \leq 5$.

Comme 2 et 5 sont positifs et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, on inverse les inégalités :

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

2 - La fonction racine carrée

Définition

Pour tout réel positif x , la **racine carrée** de x , notée $\sqrt{x}$, est l'unique réel **positif** dont le carré est égal à x :

$$(\sqrt{x})^2 = x \quad \text{et} \quad \sqrt{x} \geq 0$$

La **fonction racine carrée** est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exemple

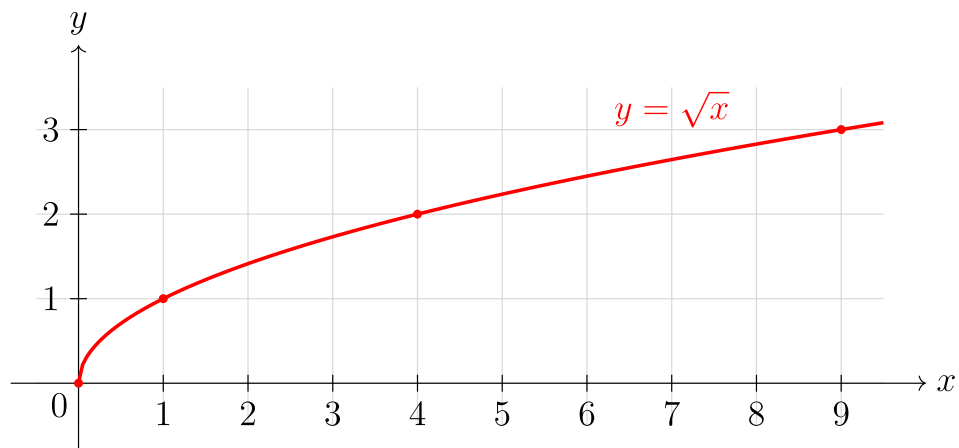
- $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$ et $2 \geq 0$
- $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$ et $3 \geq 0$
- $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$

Remarque

- $\sqrt{x}$ n'existe que pour $x \geq 0$. Par exemple, $\sqrt{-3}$ n'a pas de sens.
- Attention : $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq -5$. De manière générale, $\sqrt{x^2} = |x|$ (et non x).

Propriété

La courbe représentative de la fonction racine carrée part de l'origine et est située dans le quart de plan où $x \geq 0$ et $y \geq 0$.



🛡️ Propriété

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$

💡 Comparaison de nombres

On veut comparer $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$.

Comme $0 \leq 5 < 7$ et que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $\sqrt{5} < \sqrt{7}$.

Résolution d'une équation

Résoudre l'équation $\sqrt{x} = 3$.

Si $\sqrt{x} = 3$, alors en élevant au carré : $x = 3^2 = 9$.

Réciproquement, $\sqrt{9} = 3$. L'unique solution est donc $x = 9$.

Résolution d'une inéquation

Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \leq 4$.

Comme la fonction racine carrée est croissante, $\sqrt{x} \leq 4$ équivaut à $x \leq 4^2 = 16$, avec la condition $x \geq 0$.

L'ensemble des solutions est $[0; 16]$.

1. Comment comparer deux nombres avec la fonction inverse ?

On vérifie que les deux nombres sont de même signe, on les compare, puis on inverse le sens de l'inégalité : si $a < b$ (avec a et b de même signe), alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Voir la fiche méthode : [Comparer deux nombres avec la fonction inverse](#) ↗

2. Comment comparer deux nombres avec la fonction racine carrée ?

On vérifie que les deux nombres sont positifs, on les compare, puis on conserve le sens de l'inégalité : si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Pour comparer un entier à une racine, on met l'entier sous la forme $\sqrt{n^2}$.

Voir la fiche méthode : [Comparer deux nombres avec la fonction racine carrée](#) ↗

3. Comment résoudre graphiquement une équation ou inéquation avec une fonction de référence ?

On trace la courbe de la fonction et la droite horizontale $y = k$. Les abscisses des points d'intersection donnent les solutions de $f(x) = k$. Pour une inéquation, on lit les zones où la courbe est au-dessus ou en dessous de la droite.

Voir la fiche méthode : [Résoudre graphiquement une équation ou inéquation](#) ↗

4. Comment encadrer une expression avec la fonction inverse ?

À partir d'un encadrement $a \leq x \leq b$ (avec a et b de même signe), on applique la fonction inverse en inversant les inégalités :

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}.$$

Voir la fiche méthode : [Encadrer une expression avec la fonction inverse](#) ↗