

Fonctions linéaires et affines

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Déterminer l'expression d'une fonction affine

Tracer la droite représentative d'une fonction affine

Calculer un coefficient directeur

Déterminer le sens de variation d'une fonction affine

Résoudre $f(x) = 0$ et dresser le tableau de signes

1 - Fonctions linéaires

Définition

Une fonction **linéaire** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une formule du type : $x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}$.

a s'appelle le **coefficient de la fonction f** .

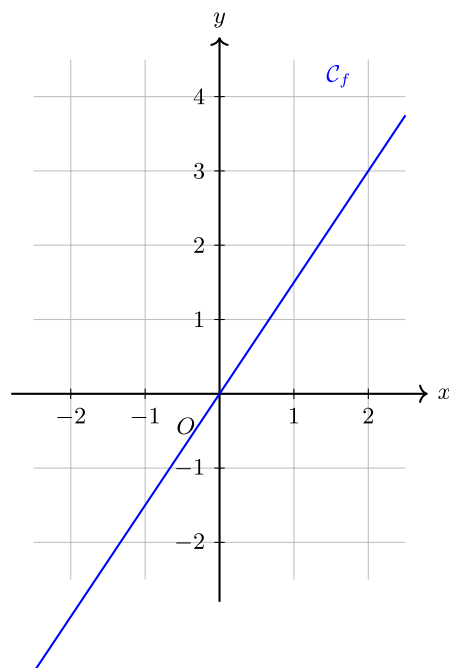
Remarque

La définition ci-dessus indique que si f est une fonction linéaire, les valeurs de $f(x)$ sont proportionnelles aux valeurs de x , le coefficient de proportionnalité étant le coefficient a de la fonction f .

Propriété

La courbe représentative d'une fonction linéaire est une **droite qui passe par l'origine** du repère.

Exemple



Représentation graphique de la fonction linéaire $x \mapsto \frac{3}{2}x$

Propriété

Soit f une fonction linéaire.

Pour tous réels x et x' : $f(x + x') = f(x) + f(x')$

Pour tous réels k et x : $f(kx) = kf(x)$

2 - Fonctions affines

Définition

Une fonction **affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une formule du type :
 $x \mapsto ax + b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Remarque

Si $b = 0$, la fonction est linéaire. Si $a = 0$, la fonction est **constante** (elle vaut b pour tout x).

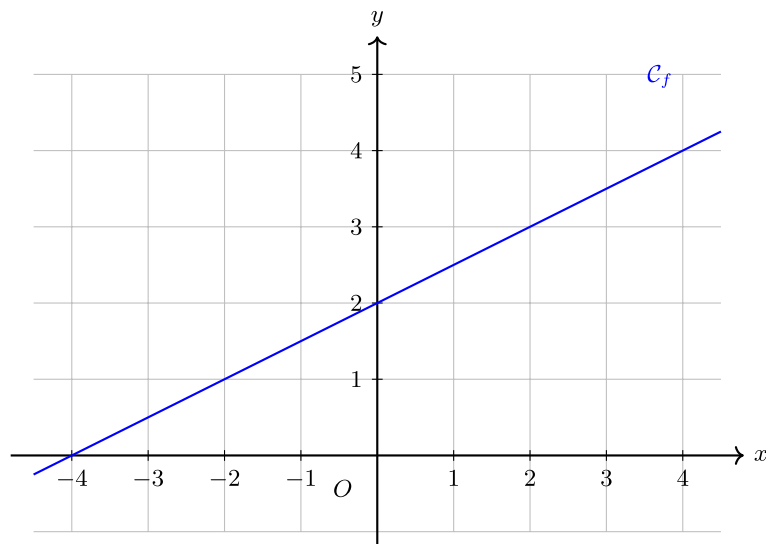
Les fonctions linéaires et constantes sont donc des cas particuliers des fonctions affines.

Propriété

La courbe représentative d'une fonction affine est une **droite**.

a est le **coefficient directeur** de la droite et b son **ordonnée à l'origine**.

Exemple



Représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$

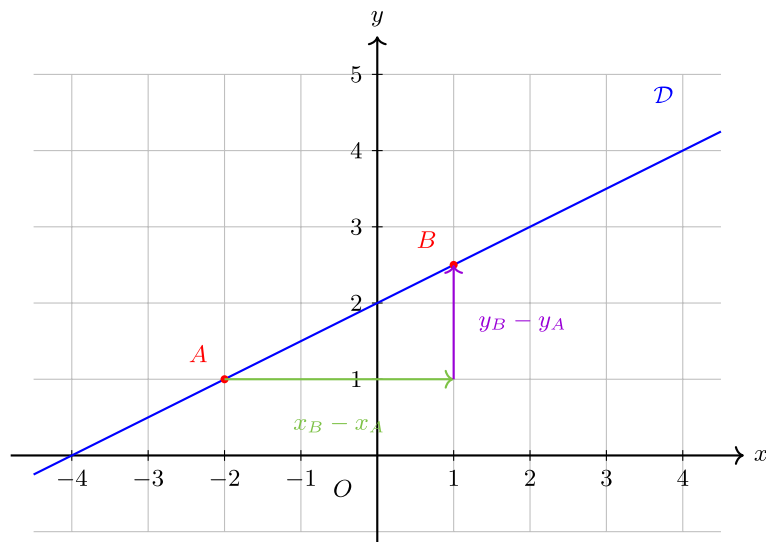
Propriété

Soit f une fonction affine de représentation graphique $\mathcal{D}$ et soient A et B deux points de $\mathcal{D}$.

Le rapport $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ne dépend pas des points A et B choisis et est égal au coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple



$$\text{Coefficient directeur de } \mathcal{D} : a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1,5}{3} = 0,5$$

3 - Taux d'accroissement

Propriété

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

f est une fonction affine si et seulement si, pour tous réels distincts a et b ,

le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

Ce rapport constant est appelé **taux d'accroissement** de la fonction f . Il est égal au coefficient directeur.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x - 2$.

Vérifions que le taux d'accroissement est constant :

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{13 - 1}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{f(0) - f(2)}{0 - 2} = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Le taux d'accroissement vaut 3, qui est bien le coefficient directeur de f .

4 - Sens de variation

Théorème

Une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est :

- **strictement croissante** si a est **strictement positif**.
- **strictement décroissante** si a est **strictement négatif**.
- **constante** si a est **nul**.

Démonstration

Démontrons, par exemple, que la fonction $f : x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante si $a < 0$.

Soient deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$.

Alors $ax_1 > ax_2$ (on change le sens de l'inégalité car on multiplie par un réel négatif), donc :

$$ax_1 + b > ax_2 + b, \text{ c'est-à-dire } f(x_1) > f(x_2).$$

Le sens de l'inégalité est inversé donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque

Ce théorème s'applique aussi aux fonctions linéaires puisque les fonctions linéaires sont des fonctions affines particulières.

5 - Signe d'une fonction affine

Propriété

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

f s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$.

Si $a > 0$: $f(x) < 0$ pour $x < -\frac{b}{a}$ et $f(x) > 0$ pour $x > -\frac{b}{a}$.

Si $a < 0$: $f(x) > 0$ pour $x < -\frac{b}{a}$ et $f(x) < 0$ pour $x > -\frac{b}{a}$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - 6$.

f s'annule pour $x = \frac{6}{2} = 3$.

Comme $a = 2 > 0$, la fonction f est strictement croissante, donc :

$f(x) < 0$ pour $x < 3$ et $f(x) > 0$ pour $x > 3$.

Remarque

Les fonctions affines particulières possèdent des propriétés de parité :

- Une fonction linéaire ($b = 0$) est une fonction **impaire** : pour tout réel x ,
 $f(-x) = -f(x)$.
- Une fonction constante ($a = 0$) est une fonction **paire** : pour tout réel x ,
 $f(-x) = f(x)$.

Les questions essentielles

1. Comment déterminer l'expression d'une fonction affine ?

À partir de deux points, on calcule le coefficient directeur avec la formule $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, puis l'ordonnée à l'origine avec $b = y_A - a \times x_A$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer l'expression d'une fonction affine](#)

2. Comment tracer la droite d'une fonction affine ?

On place le point d'ordonnée à l'origine sur l'axe des ordonnées, puis on utilise le coefficient directeur pour trouver un deuxième point et on trace la droite.

Voir la fiche méthode : [Tracer la droite représentative d'une fonction affine](#)

3. Comment calculer un coefficient directeur ?

On repère deux points de la droite et on applique la formule du taux d'accroissement : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Graphiquement, on mesure le

déplacement vertical par rapport au déplacement horizontal.

Voir la fiche méthode : [Calculer un coefficient directeur](#)

4. Comment déterminer le sens de variation d'une fonction affine ?

Il suffit de regarder le signe du coefficient directeur a : si $a > 0$, la fonction est croissante ; si $a < 0$, elle est décroissante.

Voir la fiche méthode : [Déterminer le sens de variation d'une fonction affine](#)

5. Comment dresser le tableau de signes d'une fonction affine ?

On calcule la racine $x_0 = -\frac{b}{a}$, puis on utilise le signe de a pour remplir le tableau : le signe de $f(x)$ est contraire à celui de a avant x_0 et identique après.

Voir la fiche méthode : [Résoudre \$f\(x\) = 0\$ et dresser le tableau de signes](#)