

Fonctions – Généralités

DURÉE ESTIMÉE

30 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction

Déterminer l'image d'un nombre par une fonction

Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

Dresser un tableau de variations à partir d'une courbe

Résoudre graphiquement $f(x) = k$ et $f(x) = g(x)$

Étudier la parité d'une fonction

1. Notion de fonction

Définition

Une **fonction** f est un procédé qui à tout nombre réel x d'une partie D de $\mathbb{R}$ associe **un seul** nombre réel y .

- x s'appelle la **variable**.
- y s'appelle l'**image** de x par la fonction f et se note $f(x)$
- f est la **fonction** et se note : $f : x \mapsto y = f(x)$.

Remarque

Les procédés permettant d'associer un nombre à un autre nombre peuvent être :

- des formules mathématiques (par exemple : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$)
- une courbe (par exemple : la courbe donnant le cours d'une action en Bourse en fonction du temps)
- un instrument de mesure ou de conversion (par exemple : le compteur d'un taxi qui donne le prix à payer en fonction du trajet parcouru)
- un tableau de valeurs, chaque élément de la seconde ligne étant associé à un élément de la première ligne
- une touche de calculatrice (par exemple : $\sin$, $\cos$, $\ln$, $\log$, etc.) qui affiche un résultat dépendant du nombre saisi auparavant

- etc.

🔄 Calcul d'une image

Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction définie par une formule, on remplace x par ce nombre dans l'expression de $f(x)$.

💡 Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

- Pour calculer l'image de 1 – notée $f(1)$ – on remplace x par 1 dans la formule donnant $f(x)$. On obtient alors :

$$f(1) = \frac{1^2 + 3}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

- Pour calculer l'image de -2 , on remplace x par (-2) dans cette même formule. Pensez bien à ajouter une parenthèse lorsque x est négatif ou lorsqu'il s'agit d'une expression fractionnaire. On obtient :

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 + 3}{(-2) + 1} = \frac{7}{-1} = -7$$

Définition

L'ensemble $\mathcal{D}$ des éléments x de $\mathbb{R}$ qui possèdent une image par f s'appelle l'**ensemble de définition** de f .

On dit également que f est **définie** sur $\mathcal{D}$

Remarque

Certaines fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier. Parfois, cependant, l'ensemble de définition est plus petit. C'est en particulier le cas :

- s'il est impossible de calculer $f(x)$ pour certaines valeurs de x (par exemple la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$ car il est impossible de diviser par zéro)
- si la fonction n'a aucune signification pour certaines valeurs de x (par exemple la fonction donnant l'aire d'un carré en fonction de la longueur x de ses côtés n'a pas de sens pour x négatif)

Définition

Soit y un nombre réel. Les **antécédents** de y par f sont les nombres réels x appartenant à $\mathcal{D}$ tels que $f(x) = y$. Un nombre peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédent(s).

Calcul des antécédents

Pour déterminer les antécédents d'un nombre y , on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x .

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$

Pour déterminer le ou les antécédents du nombre 2 on résout l'équation $f(x) = 2$ c'est à dire :

$$\frac{x+5}{x+1} = 2$$

On obtient alors :

$$x+5 = 2(x+1) \text{ (« produit en croix »)}$$

$$x+5 = 2x+2$$

$$x-2x = 2-5$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

Le nombre 2 possède un unique antécédent qui est $x = 3$.

2. Représentation graphique

Dans cette section, on munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

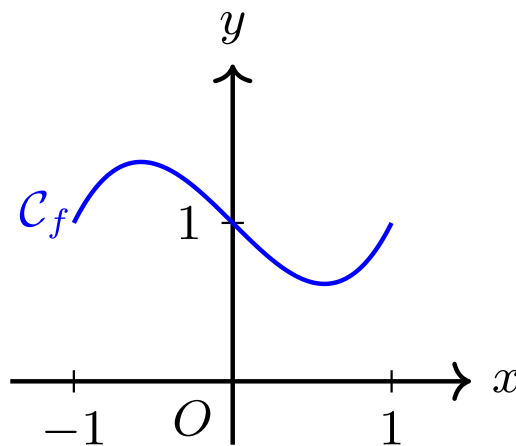
Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

La **représentation graphique** de f est la courbe $\mathcal{C}_f$ formée des points $M(x; y)$ où $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$

On dit aussi que la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

Exemple



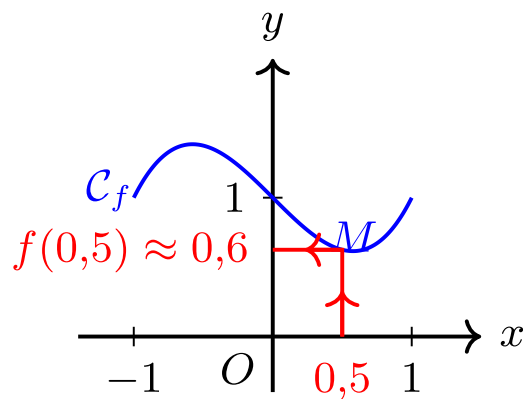
Exemple de représentation graphique d'une fonction définie sur $[-1; 1]$

Remarque

Du fait qu'un nombre ne peut pas avoir plusieurs images, la courbe représentative d'une fonction **ne peut pas contenir plusieurs points situés sur la même « verticale »** (droite parallèle à l'axe des ordonnées).

Par contre, il peut très bien y avoir plusieurs points situés sur une même horizontale comme dans l'exemple ci-dessus.

Lecture graphique de l'image d'un nombre

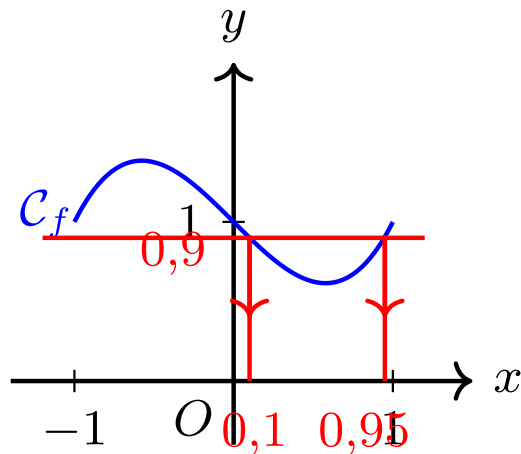


Pour déterminer graphiquement l'**image** de 0,5 par la fonction f :

- on place le point de d'**abscisse** 0,5 sur l'axe des abscisses
- on le relie au point M de la courbe qui a la même abscisse
- l'**ordonnée** du point M nous donne la valeur de $f(0,5)$; on trouve ici environ 0,6.



Lecture graphique des antécédents d'un nombre



Pour déterminer graphiquement les **antécédents** de 0,9 par la fonction f :

- on place le point de d'**ordonnée** 0,9 sur l'axe des ordonnées
- on trace la droite horizontale (d'équation $y = 0,9$) qui passe par ce point
- on trace le(s) **point(s) d'intersection** de cette droite avec la courbe. Dans cet exemple on en trouve deux ; dans d'autres exemples on pourrait en trouver zéro, un, deux ou plus...
- les **abscisses** de ces points d'intersection nous donne les antécédents de 0,9; on trouve ici deux antécédents qui valent environ 0,1 et 0,95.

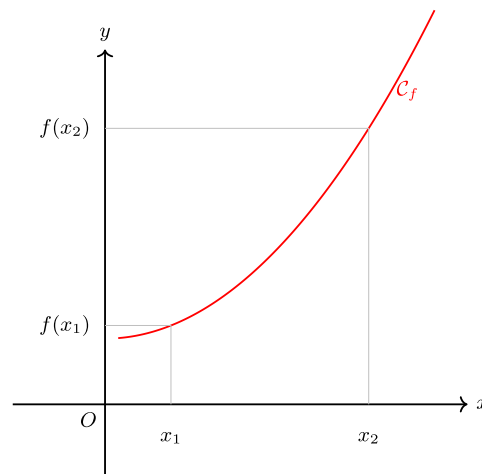
3. Variations d'une fonction

Définition

La fonction f est **croissante** sur l'intervalle I si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 \leq x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Remarque

Intuitivement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction f « monte » lorsqu'on la parcourt dans le sens de l'axe des abscisses (e.g. de gauche à droite)

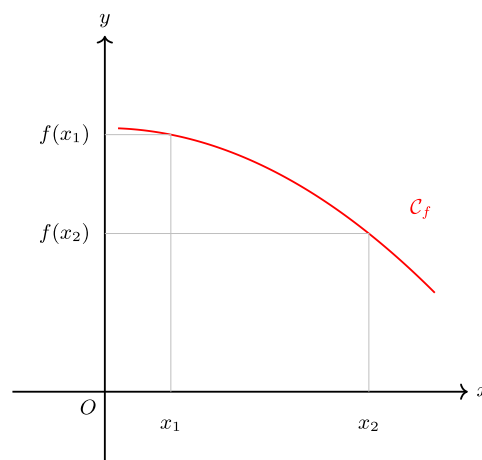


Définition

La fonction f est **décroissante** sur l'intervalle I si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 \leq x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Remarque

Intuitivement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction f « descend » lorsqu'on la parcourt dans le sens de l'axe des abscisses (e.g. de gauche à droite)

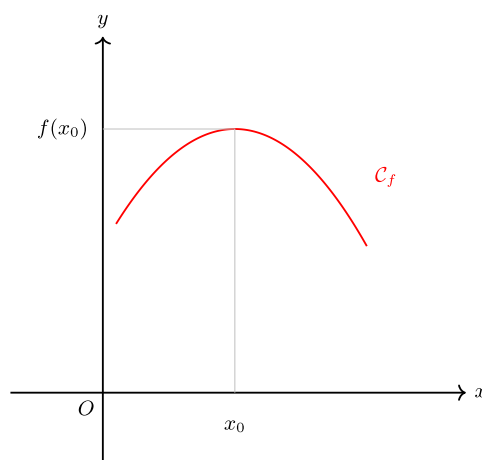


Définition

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$.

La fonction f admet un **maximum** en x_0 sur l'intervalle I si pour tout réel x de I , $f(x) \leq f(x_0)$. Le maximum de la fonction f sur I est alors

$$M = f(x_0)$$

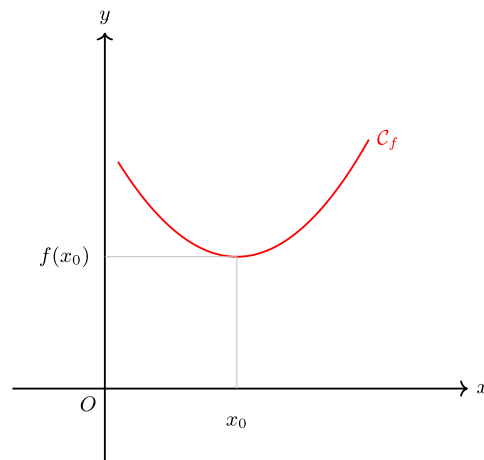


Définition

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$.

La fonction f admet un **minimum** en x_0 sur l'intervalle I si pour tout réel x de I , $f(x) \geq f(x_0)$. Le minimum de la fonction f sur I est alors

$$m = f(x_0)$$



Remarque

- Un **extremum** est un maximum ou un minimum
- **Attention à la rédaction :**
Lorsqu'on dit que f admet un maximum (*resp.* minimum) **en** x_0 (ou **pour** $x = x_0$), x_0 correspond à la valeur de la **variable** x et non à la valeur du maximum (*resp.* minimum).

Par exemple, dans le tableau de l'exemple ci-dessous, f admet un maximum **en** 0. Ce maximum **est égal à 6** (*Ne pas écrire que le maximum est 0* !).

- Les variations d'une fonction peuvent être représentées par un **tableau de variations**

Exemple

Soit f une fonction définie sur $[-2; 5]$, croissante sur $[-2; 0]$ et décroissante sur $[0; 5]$ avec $f(-2) = -3$, $f(0) = 6$ et $f(5) = 1$

Le tableau de variations de la fonction f est :

x	-2	0	5
$f(x)$	-3	6	1

4. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Définition

Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et k un réel fixé.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ consiste à déterminer tous les réels x de $\mathcal{D}$ qui ont pour image k par f .

Cela revient à chercher les **abscisses des points d'intersection** de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale d'équation $y = k$.

Exemple

Soit f une fonction dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée dans un repère. On veut résoudre $f(x) = 2$.

On trace la droite $y = 2$ et on repère les points d'intersection avec $\mathcal{C}_f$. Les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation.

Si la droite coupe la courbe en deux points d'abscisses -1 et 3 , alors l'ensemble des solutions est $S = \{-1; 3\}$.

Propriété

- L'équation $f(x) = k$ peut avoir zéro, une ou plusieurs solutions selon le nombre de points d'intersection de la courbe avec la droite $y = k$.
- L'inéquation $f(x) \leq k$ a pour solutions les valeurs de x pour lesquelles la courbe est **en dessous ou sur** la droite $y = k$.
- L'inéquation $f(x) \geq k$ a pour solutions les valeurs de x pour lesquelles la courbe est **au-dessus ou sur** la droite $y = k$.

Remarque

De même, résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

L'inéquation $f(x) \geq g(x)$ a pour solutions les valeurs de x pour lesquelles la courbe de f est au-dessus de celle de g .

5. Parité d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ **symétrique par rapport à 0** (c'est-à-dire que si $x \in \mathcal{D}$, alors $-x \in \mathcal{D}$).

- f est **paire** si pour tout $x \in \mathcal{D} : f(-x) = f(x)$
- f est **impaire** si pour tout $x \in \mathcal{D} : f(-x) = -f(x)$

Traduction géométrique

Dans un repère orthogonal :

- La courbe d'une fonction **paire** est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**.
- La courbe d'une fonction **impaire** est symétrique par rapport à l'**origine** du repère.

Exemple

La fonction carré $f(x) = x^2$ est **paire** car pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Sa courbe (une parabole) est bien symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple

La fonction cube $f(x) = x^3$ est **impaire** car pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Sa courbe est bien symétrique par rapport à l'origine.

Remarque

La plupart des fonctions ne sont ni paires, ni impaires. Par exemple, la fonction $f(x) = x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire car $f(-x) = x^2 - x$ n'est égal ni à $f(x)$ ni à $-f(x)$.

Les questions essentielles

1. Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ?

On recense les valeurs interdites : un dénominateur ne doit pas s'annuler et l'expression sous une racine carrée doit rester positive ou nulle. Partout ailleurs, la fonction est en général définie sur $\mathbb{R}$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction](#)

2. Comment calculer l'image d'un nombre par une fonction ?

On remplace x par la valeur voulue dans l'expression de f , puis on effectue le calcul.

Voir la fiche méthode : [Déterminer l'image d'un nombre par une fonction](#)

3. Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction ?

On résout l'équation $f(x) = k$, où k est le nombre dont on cherche les antécédents.

Voir la fiche méthode : [Déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction](#)

4. Comment dresser un tableau de variations à partir d'une courbe ?

On repère les intervalles où la courbe monte et ceux où elle descend, ainsi que les abscisses des extremums, puis on traduit le tout par des flèches.

Voir la fiche méthode : [Dresser un tableau de variations à partir d'une courbe](#)

5. Comment résoudre graphiquement $f(x) = k$ ou $f(x) = g(x)$?

On lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite $y = k$, ou des deux courbes entre elles.

Voir la fiche méthode : [Résoudre graphiquement \$f\(x\) = k\$ et \$f\(x\) = g\(x\)\$](#)

6. Comment étudier la parité d'une fonction ?

On vérifie d'abord que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, puis on calcule $f(-x)$ et on le compare à $f(x)$ (paire) et à $-f(x)$ (impaire).

Voir la fiche méthode : [Étudier la parité d'une fonction](#)

↓ Télécharger en PDF