

Fonctions carré et cube

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Résoudre une équation du type $x^2 = a$ Encadrer x^2 à partir d'un encadrement de x

Comparer des nombres avec la fonction carré

Comparer des nombres avec la fonction cube

Déterminer la position relative des courbes

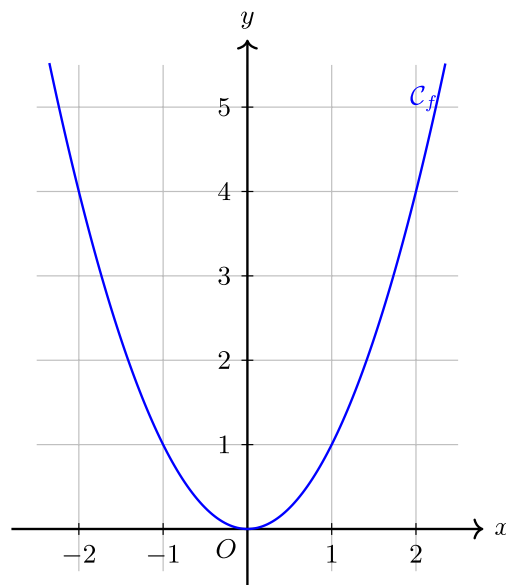
I. La fonction «carré »

Définition

La fonction « **carré** » est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^2$.

Sa courbe représentative est une **parabole**.

Elle est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**.



Propriété

La fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et strictement croissante sur $] 0; \infty[$. Elle admet en 0 un minimum égal à 0.

Propriété

La fonction carré est une fonction **paire** : pour tout réel x , $(-x)^2 = x^2$, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$.

C'est la traduction algébrique de la symétrie de la parabole par rapport à l'**axe des ordonnées**.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

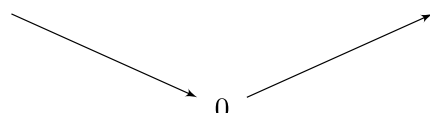


Tableau de variations de la fonction carrée

Démonstration

Démontrons par exemple que la fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0[$.

Notons $f : x \mapsto x^2$ et soient x_1 et x_2 , deux réels quelconques tels que $x_1 < x_2 < 0$.

Alors :

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

Or $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$

et $x_1 + x_2 < 0$ car x_1 et x_2 sont tous les deux négatifs.

Donc le produit $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ est positif.

On en déduit $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc $f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$.

Propriété

Soit a un nombre réel. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = a$

- n'admet **aucune** solution **si** $a < 0$
- admet $x = 0$ comme **unique** solution **si** $a = 0$
- admet **deux** solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ **si** $a > 0$

Exemple

- L'équation $x^2 = 2$ admet deux solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
- L'équation $x^2 + 1 = 0$ est équivalente à $x^2 = -1$. Elle n'admet donc aucune solution réelle.

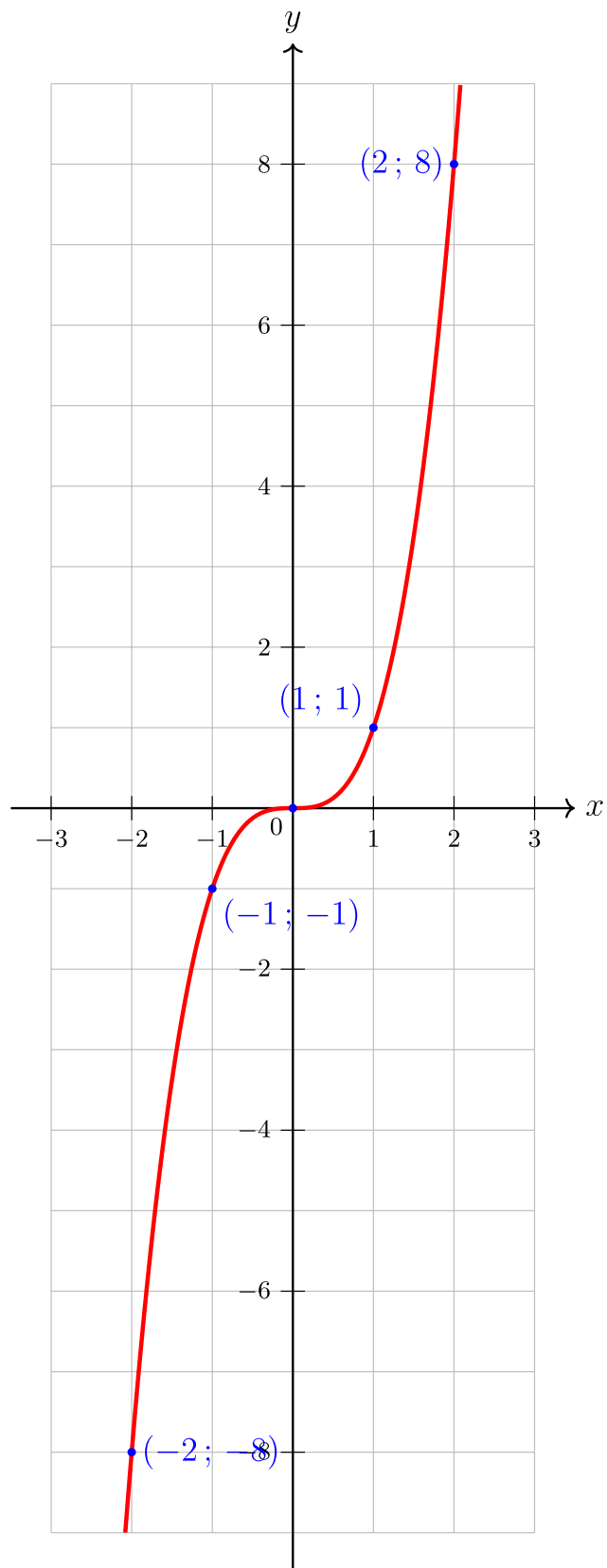
II. La fonction «cube »

Définition

La fonction « **cube** » est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^3$.

Exemple

- $f(2) = 2^3 = 8$
- $f(-2) = (-2)^3 = -8$
- $f(1,5) = (1,5)^3 = 3,375$
- $f(0) = 0^3 = 0$



Propriété

La fonction cube est une fonction **impaire** : pour tout réel x , $(-x)^3 = -x^3$.

Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'**origine** du repère.

Remarque

Pour tout réel x , le nombre x^3 est du **même signe** que x :

- si $x > 0$ alors $x^3 > 0$
- si $x < 0$ alors $x^3 < 0$
- si $x = 0$ alors $x^3 = 0$

Propriété

La fonction cube est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Remarque

Pour une démonstration détaillée de cette propriété, voir l'exercice **Démontrer que la fonction cube est croissante.**

III. Position relative des courbes

Propriété

Pour tout $x > 0$, on compare x , x^2 et x^3 :

- si $x > 1$: $x < x^2 < x^3$
- si $0 < x < 1$: $x^3 < x^2 < x$
- si $x = 0$ ou $x = 1$: $x = x^2 = x^3$

Démonstration

Soit $x > 0$. Comparons x et x^2 :

$$x^2 - x = x(x - 1)$$

Comme $x > 0$, le signe de $x^2 - x$ est celui de $x - 1$.

- Si $x > 1$: $x - 1 > 0$ donc $x^2 - x > 0$, d'où $x^2 > x$.
- Si $0 < x < 1$: $x - 1 < 0$ donc $x^2 - x < 0$, d'où $x^2 < x$.

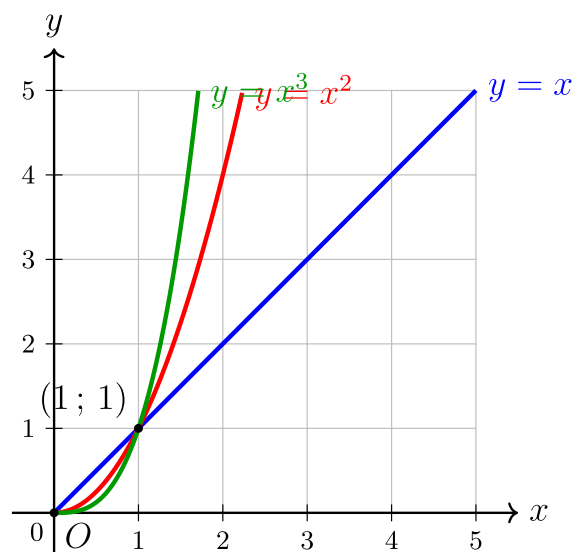
Comparons maintenant x^2 et x^3 :

$$x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$$

Comme $x > 0$, on a $x^2 > 0$, et le signe de $x^3 - x^2$ est celui de $x - 1$.

- Si $x > 1$: $x - 1 > 0$ donc $x^3 > x^2$.
- Si $0 < x < 1$: $x - 1 < 0$ donc $x^3 < x^2$.

En combinant : pour $x > 1$, on a $x < x^2 < x^3$ et pour $0 < x < 1$, on a $x^3 < x^2 < x$.



Les questions essentielles

1. Comment résoudre une équation du type $x^2 = a$?

On distingue trois cas selon le signe de a : aucune solution si $a < 0$, une solution si $a = 0$, et deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$.

Voir la fiche méthode : [Résoudre une équation du type \$x^2 = a\$](#)

2. Comment encadrer x^2 à partir d'un encadrement de x ?

On utilise les variations de la fonction carré en tenant compte du signe des bornes. Attention au cas où l'intervalle contient 0 : le minimum de x^2 est alors 0.

Voir la fiche méthode : [Encadrer \$x^2\$ à partir d'un encadrement de \$x\$](#)

3. Comment comparer des nombres avec la fonction carré ?

On élève les deux nombres au carré, puis on utilise la croissance (positifs) ou la décroissance (négatifs) de la fonction carré pour en déduire l'ordre.

Voir la fiche méthode : [Comparer des nombres avec la fonction carré](#)

4. Comment comparer des nombres avec la fonction cube ?

On élève les deux nombres au cube et on compare : la fonction cube étant croissante sur $\mathbb{R}$, l'ordre est toujours conservé.

Voir la fiche méthode : [Comparer des nombres avec la fonction cube](#)

5. Comment déterminer la position relative des courbes $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$?

On distingue deux cas pour $x > 0$: si $x > 1$ alors $x < x^2 < x^3$, et si $0 < x < 1$ alors $x^3 < x^2 < x$. Les courbes se croisent en $x = 0$ et $x = 1$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer la position relative des courbes](#)

📄 Télécharger en PDF