

Équations et inéquations

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Résoudre une équation produit

Résoudre une inéquation du premier degré

Dresser un tableau de signes (en Seconde)

Inéquation avec quotients

I. Équations

Théorème

- Si l'on ajoute ou si l'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une équation, on obtient une équation équivalente (c'est à dire qui possède les mêmes solutions).
- Si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre d'une équation par un même nombre **non nul**, on obtient une équation équivalente.

Remarque

Pour résoudre une équation du type $ax + b = 0$ on soustrait b à chaque membre de l'égalité :

$$ax + b - b = 0 - b \text{ c'est à dire } ax = -b.$$

Puis :

- si a est **non nul** on divise chaque membre par a : $\frac{ax}{a} = -\frac{b}{a}$ soit

$$x = -\frac{b}{a} \text{ donc } S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

- si $a = 0$:
 - si $b = 0$ l'équation se réduit à $0 = 0$. Elle est toujours vérifiée donc $S = \mathbb{R}$
 - si $b \neq 0$ l'équation se réduit à $b = 0$. Elle n'est jamais vérifiée donc $S = \emptyset$

Théorème (Équation produit)

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul.

En particulier, une équation du type $A(x) \times B(x) = 0$ est vérifiée si et seulement si :

$$A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

Exemple

Soit l'équation $(3x - 5)(x + 2) = 0$

Cette équation est équivalente à $3x - 5 = 0$ **ou** $x + 2 = 0$.

C'est à dire $x = \frac{5}{3}$ **ou** $x = -2$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \left\{ -2; \frac{5}{3} \right\}$

Remarque

- Lorsqu'on a affaire à une équation du second degré (ou plus), on fait « passer » tous les termes dans le membre de gauche que l'on essaie de factoriser et on utilise le théorème précédent.
- On rappelle les identités remarquables qui peuvent être utiles dans ce genre de situations :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Théorème

Un quotient est **défini** si et seulement si son **dénominateur** est **non nul**.

S'il est défini, un quotient est **nul** si et seulement si son **numérateur** est **nul**.

Exemple

Soit l'équation $\frac{2x - 4}{x + 1} = 0$

Cette équation a un sens si $x + 1 \neq 0$ donc si $x \neq -1$

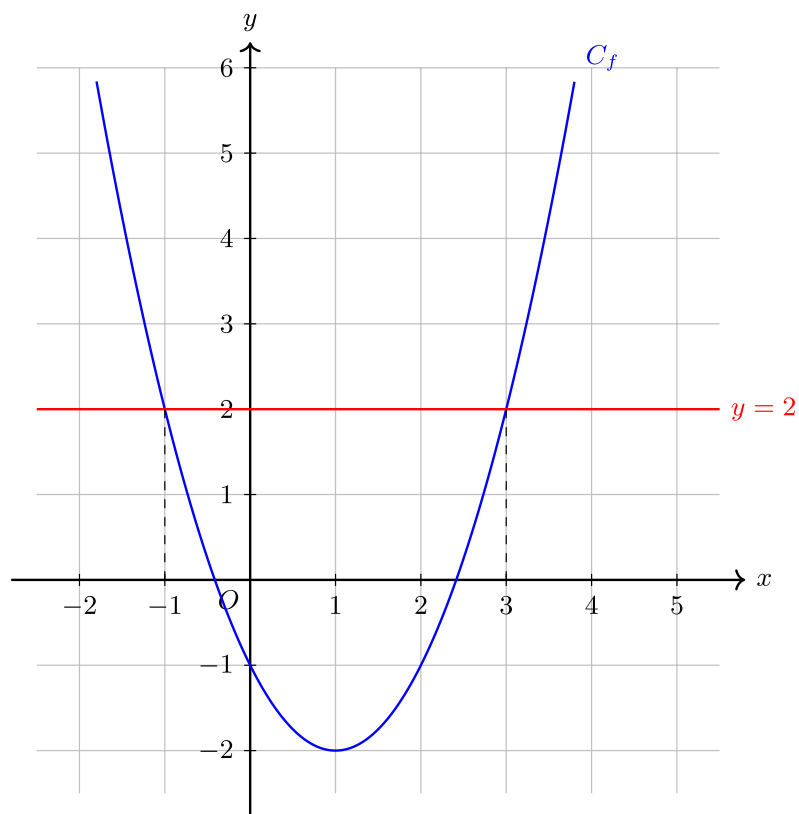
Sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ cette équation est équivalente à $2x - 4 = 0$ donc à $x = 2$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \{2\}$

Propriété

Soit f une fonction définie sur D de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les **abscisses** des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$

Exemple



Sur la figure ci-dessus, l'équation $f(x) = 2$ possède deux solutions qui sont -1 et 3

Théorème

L'équation $x^2 = a$:

- admet deux solutions $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$ si $a > 0$
- admet une unique solution $x = 0$ si $a = 0$
- n'admet aucune solution réelle si $a < 0$

Exemple

- L'équation $x^2 = 1$ admet deux solutions qui sont $x = -1$ et $x = 1$
- L'équation $x^2 + 1 = 0$ est équivalente à $x^2 = -1$ et n'admet donc aucune solution

II. Inéquations

Théorème

- Si l'on ajoute ou si l'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente (c'est à dire qui a les mêmes solutions).
- Si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre d'une inéquation par un même nombre **strictement positif**, on obtient une inéquation équivalente.
- Si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre d'une inéquation par un même nombre **strictement négatif**, on obtient une inéquation équivalente **en changeant le sens de l'inégalité**.

Passage à l'inverse

Pour deux nombres **strictement positifs** a et b :

$$a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Passer à l'inverse **change le sens** de l'inégalité. Par exemple, comme $2 < 5$,

on a $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$.

Exemple

Pour résoudre l'inéquation $-3x + 5 > 0$ on soustrait 5 à chaque membre de l'inéquation :

$$-3x + 5 - 5 > 0 - 5 \text{ c'est à dire } -3x > -5.$$

Puis comme -3 est négatif on divise chaque membre par -3 **en changeant le sens de l'inégalité** :

$$\frac{-3x}{-3} < \frac{-5}{-3}$$

$$x < \frac{5}{3}$$

$$\text{Donc } S = \left] -\infty; \frac{5}{3} \right[$$

Remarque

En appliquant le théorème précédent à l'expression $ax + b$ on obtient :

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \text{ si } a \text{ est strictement positif}$$

$$\text{et } ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \text{ si } a \text{ est strictement négatif.}$$

On peut alors regrouper ces deux cas dans le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

Théorème (Inéquation produit)

Un produit de facteurs $A(x)B(x)$ est **positif ou nul** si et seulement si les deux facteurs $A(x)$ et $B(x)$ sont de **même signe**.

Ce produit est **négatif ou nul** si et seulement si les deux facteurs $A(x)$ et $B(x)$ sont de **signes contraires**.

Remarque

Lorsqu'on a affaire à une inéquation du second degré (ou plus), on fait « passer » tous les termes dans le membre de gauche que l'on essaie de factoriser puis on utilise un tableau de signe.

Exemple

Soit l'inéquation $(x - 5)(-3x + 4) \geq 0$

Le signe de $x - 5$ est donné par le tableau :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$x - 5$	$-$	0	$+$

Le signe de $-3x + 4$ est donné par le tableau :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$-3x + 4$	+	0	-

On regroupe ces résultats dans un unique tableau et on utilise la règle des signes pour obtenir le signe du produit :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	5	$+\infty$	
$x - 5$	$-$	$-$	0	$+$	
$-3x + 4$	$+$	0	$-$	$-$	
$(x - 5)(-3x + 4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$(x - 5)(-3x + 4)$ est positif ou nul sur l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 5\right]$

Pour plus de détails et d'autres exemples, consulter la fiche méthode :
Dresser un tableau de signes

Théorème (Inéquation quotient)

Un quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$ est **défini** si et seulement si son **dénominateur** $B(x)$ est **non nul**.

S'il est défini, il est **positif ou nul** si et seulement si $A(x)$ et $B(x)$ sont de **même signe** et il est **négatif ou nul** si et seulement si les deux facteurs $A(x)$ et $B(x)$ sont de **signes contraires**.

Exemple

Soit l'inéquation $\frac{2x - 5}{x + 2} \geq 0$

Cette inéquation a un sens si $x + 2 \neq 0$ donc si $x \neq -2$

Le tableau de signe de $\frac{2x - 5}{x + 2}$ est :

x	$-\infty$	-2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
$2x - 5$		$-$	$-$	0	$+$
$x + 2$		$-$	0	$+$	$+$
$\frac{2x - 5}{x + 2}$		$+$	$-$	0	$+$

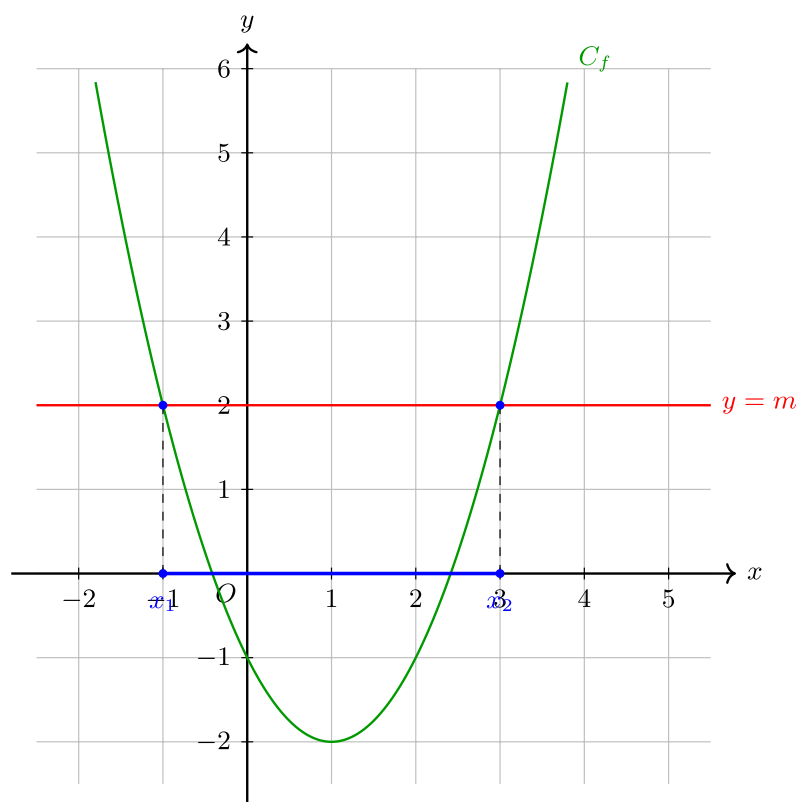
$\frac{2x - 5}{x + 2}$ est positif ou nul sur l'ensemble $] -\infty; -2[\cup \left[\frac{5}{2}; +\infty \right[$

Propriété

Soit f une fonction définie sur D de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et m un nombre réel.

- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq m$ sont les **abscisses** des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés **au dessous** de la droite horizontale d'équation $y = m$ (On inclut les points d'intersection si l'inégalité est large, on les exclut si l'inégalité est stricte.)
- De même, les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les **abscisses** des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés **au dessus** de droite horizontale d'équation $y = m$

Exemple



Sur la figure ci-dessus, l'inéquation $f(x) \leq m$ a pour solution l'intervalle $[x_1; x_2]$

1. Comment résoudre une équation produit-nul du type

$$(ax + b)(cx + d) = 0 ?$$

Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs soit nul. La méthode consiste à scinder l'équation en deux petites équations simples : on résout $ax + b = 0$ d'un côté et $cx + d = 0$ de l'autre pour trouver les deux solutions possibles.

Voir la fiche méthode : [Résoudre une équation produit](#)

2. Quelles sont les règles pour résoudre une inéquation du premier degré sans se tromper ?

Le but est d'isoler x en passant les termes d'un côté à l'autre. La règle d'or à ne pas oublier : si l'on multiplie ou divise les deux membres par un nombre négatif, il faut impérativement inverser le sens de l'inégalité (par exemple, $\leq$ devient $\geq$).

Voir la fiche méthode : [Résoudre une inéquation simple](#)

3. Comment construire et remplir un tableau de signes ?

Il faut d'abord trouver les valeurs qui annulent chaque facteur (les racines). On place ces valeurs dans l'ordre croissant sur la première ligne. Ensuite, on étudie le signe de chaque facteur (fonction affine) en utilisant le signe du coefficient a (signe de a à droite du zéro). Enfin, on applique la règle des signes (+ par - donne -) pour remplir la dernière ligne.

Voir la fiche méthode : [Faire un tableau de signes](#)

4. Quelle est la méthode pour résoudre une inéquation produit ?

La résolution se fait en trois étapes :

- 1. Se ramener à 0 (si ce n'est pas déjà fait) pour avoir une expression de type $A(x)B(x) \geq 0$.
- 2. Étudier le signe de chaque facteur (souvent des fonctions affines).
- 3. Dresser un tableau de signes et conclure en donnant l'ensemble des solutions.

Voir la fiche méthode : [Dresser un tableau de signes](#)

5. Quelle est la méthode pour résoudre une inéquation quotient ?

La résolution se fait en trois étapes :

- 1. Déterminer la valeur interdite (celle qui annule le dénominateur).
- 2. Se ramener à 0 (si ce n'est pas déjà fait) pour avoir une expression de type $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$.
- 3. Dresser un tableau de signes en n'oubliant pas la double barre sous la valeur interdite.

Voir la fiche méthode : [Les inéquations quotient](#)

6. Comment résoudre les équations avec un carré du type $x^2 = a$?

Il ne faut pas chercher à isoler x comme une équation classique, mais appliquer la propriété des racines carrées. Selon que le nombre a est positif, nul ou négatif, l'équation admettra soit deux solutions ($\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$), soit une seule (0), soit aucune solution réelle.

📄 Télécharger en PDF