

Équations de droites

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues (par substitution)

Déterminer l'équation réduite d'une droite

Déterminer une équation cartésienne d'une droite

Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes

1 - Équation réduite d'une droite

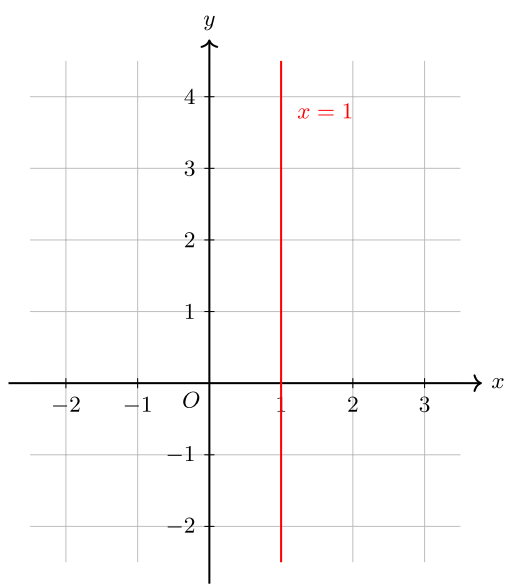
Propriété

Une droite du plan peut être caractérisée par une équation de la forme :

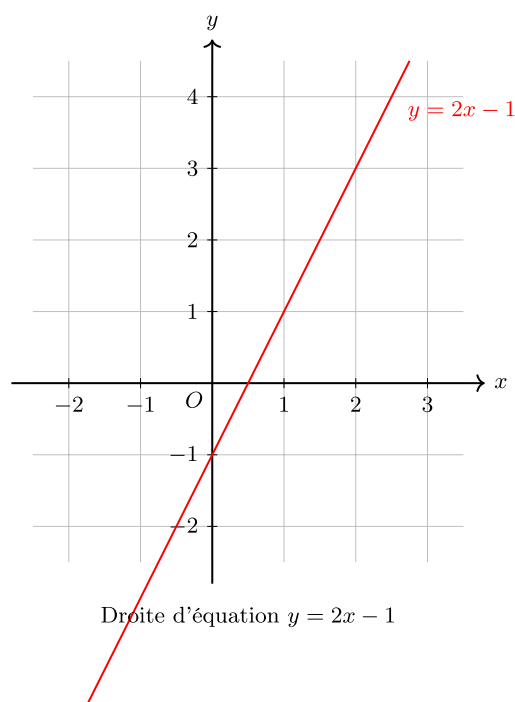
- $x = c$ si cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées (« *verticale* »)
- $y = mx + p$ si cette droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans le second cas, m est appelé coefficient directeur et p ordonnée à l'origine.

Exemple



Droite d'équation $x = 1$



Droite d'équation $y = 2x - 1$

Remarque

- L'équation d'une droite peut s'écrire sous plusieurs formes. Par exemple $y = 2x - 1$ est équivalente à $y - 2x + 1 = 0$ ou $2y - 4x + 2 = 0$, etc.

Les formes $x = c$ et $y = mx + p$ sont appelées **équation réduite** de la droite.

- Cette propriété indique que toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine. (Voir chapitre Fonctions linéaires et affines)
- Une droite parallèle à l'axe des abscisses a un coefficient directeur m égal à zéro. Son équation est donc de la forme $y = p$. C'est la représentation graphique d'une fonction constante.

Propriété

Soient A et B deux points du plan tels que $x_A \neq x_B$.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque

Une fois que le coefficient directeur de la droite (AB) est connu, on peut trouver l'ordonnée à l'origine en sachant que la droite (AB) passe par le

point A donc que les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite.

Exemple

On recherche l'équation de la droite passant par les points $A(1; 3)$ et $B(3; 5)$.

Les points A et B n'ayant pas la même abscisse, cette équation est du type $y = mx + p$ avec :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc l'équation de (AB) est de la forme $y = x + p$. Comme cette droite passe par A , l'équation est vérifiée si on remplace x et y par les coordonnées de A donc :

$$3 = 1 + p \text{ soit } p = 2.$$

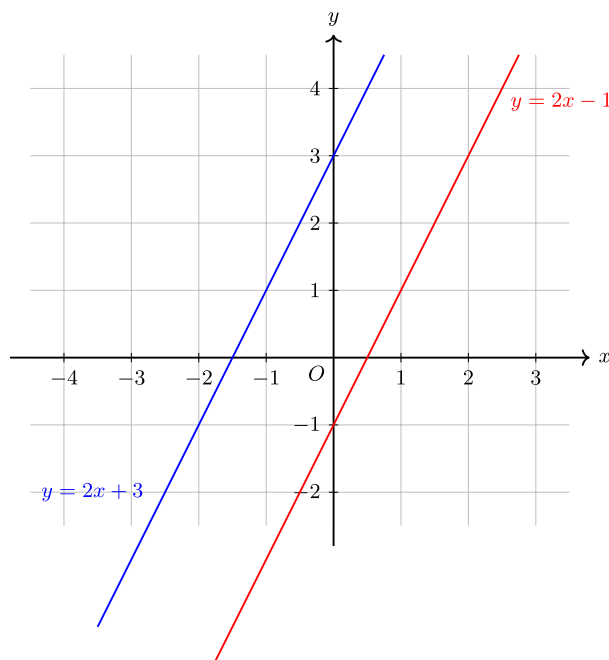
L'équation de (AB) est donc $y = x + 2$.

2 - Droites parallèles et droites sécantes

Propriété

Deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont **parallèles** si et seulement si elles ont le même coefficient directeur :
 $m = m'$.

Exemple



Équations de droites parallèles

Méthode

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Les coordonnées $(x; y)$ du point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

Remarque

Ce système se résout simplement par substitution. Il est équivalent à :

$$\begin{cases} mx + p = m'x + p' \\ y = mx + p \end{cases}$$

Exemple

On cherche les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives $y = 2x + 1$ et $y = 3x - 1$.

Ces droites n'ont pas le même coefficient directeur donc elles sont sécantes.

Les coordonnées du point d'intersection vérifient le système :

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

qui équivaut à :

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3x - 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Le point d'intersection a pour coordonnées (2; 5).

3 - Vecteur directeur d'une droite

Définition

On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de d .

Remarque

Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs : si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d , alors tout vecteur $k\vec{u}$ (avec $k \neq 0$) est aussi un vecteur directeur de d .

Exemple

Soit la droite d passant par $A(1; 3)$ et $B(4; 5)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}(4 - 1; 5 - 3) = \overrightarrow{AB}(3; 2)$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}(3; 2)$ est un vecteur directeur de d .

Le vecteur $\vec{v}(6; 4) = 2\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de d .

Propriété

Si $\vec{u}(a; b)$ est un vecteur directeur d'une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées (c'est-à-dire $a \neq 0$), alors le coefficient directeur de d est :

$$m = \frac{b}{a}$$

Exemple

La droite d admet le vecteur directeur $\vec{u}(3; 2)$.

Son coefficient directeur est $m = \frac{2}{3}$.

4 - Équation cartésienne d'une droite

Théorème

Dans un repère orthonormé, les coordonnées des points $M(x; y)$ d'une droite d vérifient une relation de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où a , b et c sont des nombres réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Cette relation est appelée **équation cartésienne** de la droite d .

Démonstration au programme

Soient $P(x_P; y_P)$ et $Q(x_Q; y_Q)$ deux points d'une droite d .

Pour tout point $M(x; y)$ appartenant à d , les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires, donc leur déterminant est nul :

$$\det(\overrightarrow{PM}; \overrightarrow{PQ}) = 0$$

$$(x - x_P)(y_Q - y_P) - (y - y_P)(x_Q - x_P) = 0$$

En développant et en posant $a = y_Q - y_P$, $b = x_P - x_Q$ et $c = x_Q y_P - x_P y_Q$, on obtient :

$$ax + by + c = 0$$

Remarque

- Il existe une infinité d'équations cartésiennes pour une même droite. Par exemple, $2x + 3y - 6 = 0$ et $4x + 6y - 12 = 0$ représentent la même droite.
- Si $b \neq 0$, on peut passer de l'équation cartésienne à l'équation réduite :
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$
- Si $b = 0$, la droite est parallèle à l'axe des ordonnées et son équation est
$$x = -\frac{c}{a}.$$

Propriété

Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Exemple

Soit la droite d d'équation $2x + 3y - 6 = 0$.

On a $a = 2$ et $b = 3$, donc un vecteur directeur de d est $\vec{u}(-3; 2)$.

Le coefficient directeur de d est $m = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$.

L'équation réduite de d est $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Exemple

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(2; 1)$ et $B(5; 4)$.

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}(5 - 2; 4 - 1) = \overrightarrow{AB}(3; 3)$$

Pour tout point $M(x; y)$ de la droite (AB) , les vecteurs

$\overrightarrow{AM}(x - 2; y - 1)$ et $\overrightarrow{AB}(3; 3)$ sont colinéaires :

$$\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$(x - 2) \times 3 - (y - 1) \times 3 = 0$$

$$3x - 6 - 3y + 3 = 0$$

$$3x - 3y - 3 = 0$$

En simplifiant par 3 :

$$x - y - 1 = 0$$

5 - Alignement de trois points

Propriété

Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\det \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right) = 0$$

Exemple

On considère les points $A (1; 2)$, $B (4; 5)$ et $C (7; 8)$.

On calcule les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{AB} (3; 3)$ et $\overrightarrow{AC} (6; 6)$

$$\det \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right) = 3 \times 6 - 3 \times 6 = 18 - 18 = 0$$

Le déterminant est nul, donc les points A , B et C sont **alignés**.

Exemple

On considère les points $D (1; 3)$, $E (4; 5)$ et $F (2; 1)$.

$\overrightarrow{DE} (3; 2)$ et $\overrightarrow{DF} (1; -2)$

$$\det \left(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF} \right) = 3 \times (-2) - 2 \times 1 = -6 - 2 = -8 \neq 0$$

Le déterminant n'est pas nul, donc les points D , E et F ne sont **pas alignés**.

Les questions essentielles

1. Comment déterminer l'équation réduite d'une droite à partir de deux points ?

On calcule d'abord le coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, puis on détermine l'ordonnée à l'origine p en utilisant les coordonnées de l'un des deux points.

Voir la fiche méthode : [Déterminer l'équation réduite d'une droite](#)

2. Comment déterminer une équation cartésienne d'une droite ?

On utilise la colinéarité : pour tout point M de la droite passant par A et B , les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On écrit que leur déterminant est nul, puis on développe.

Voir la fiche méthode : [Déterminer une équation cartésienne d'une droite](#)

3. Comment savoir si deux droites sont parallèles ou sécantes ?

On compare leurs coefficients directeurs (forme réduite) ou on calcule le déterminant de leurs vecteurs directeurs (forme

cartésienne). Si les coefficients sont égaux (ou le déterminant nul), les droites sont parallèles.

Voir la fiche méthode : [Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes](#)

4. Comment résoudre un système de deux équations à deux inconnues ?

On utilise la méthode par substitution : on exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une équation, puis on remplace dans la seconde équation pour obtenir une équation à une seule inconnue.

Voir la fiche méthode : [Résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues \(par substitution\)](#)

 **Télécharger en PDF**