Triangles et cas d'égalité

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

1. Somme des angles d'un triangle

Somme des angles d'un triangle

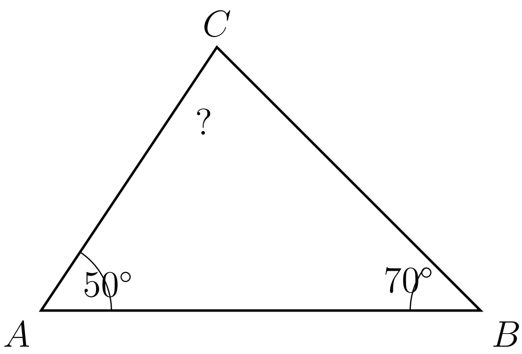
La somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à 180°.

Dans un triangle ABC :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ$$

Exemple

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 50^\circ$ et $\widehat{ABC} = 70^\circ$. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$.



La somme des angles d'un triangle est égale à 180°, donc :

$\widehat{BCA} = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$

Triangles particuliers

- Un **triangle isocèle** a deux côtés de même longueur. Les deux angles à la base ont la même mesure.
- Un **triangle équilatéral** a trois côtés de même longueur. Ses trois angles mesurent chacun 60°.
- Un **triangle rectangle** a un angle droit (90°). La somme des deux angles aigus vaut donc 90°.

2. Inégalité triangulaire

Inégalité triangulaire

Dans un triangle, la longueur de chaque côté est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Remarque

Pour vérifier si trois longueurs permettent de construire un triangle, il suffit de vérifier que la **plus grande** est strictement inférieure à la somme des deux autres.

Exemple

Peut-on construire un triangle ABC tel que $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 9$ cm ?

Le plus grand côté est $BC = 9$ cm.

$AB + AC = 3 + 5 = 8$ cm.

Or $9 > 8$, donc $BC > AB + AC$: le triangle ABC **n'est pas constructible**.

Exemple

Peut-on construire un triangle DEF tel que $DE = 4$ cm, $EF = 6$ cm et $DF = 7$ cm ?

Le plus grand côté est $DF = 7$ cm.

$DE + EF = 4 + 6 = 10$ cm.

Or $7 < 10$, donc $DF < DE + EF$: le triangle DEF **est constructible**.

3. Cas d'égalité des triangles

3.1 Triangles égaux

Triangles égaux

Deux triangles sont **égaux** (ou isométriques) lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur.

Propriété

Si deux triangles sont égaux, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Remarque

Deux triangles égaux sont superposables : on peut déplacer l'un pour le placer exactement sur l'autre (éventuellement en le retournant).

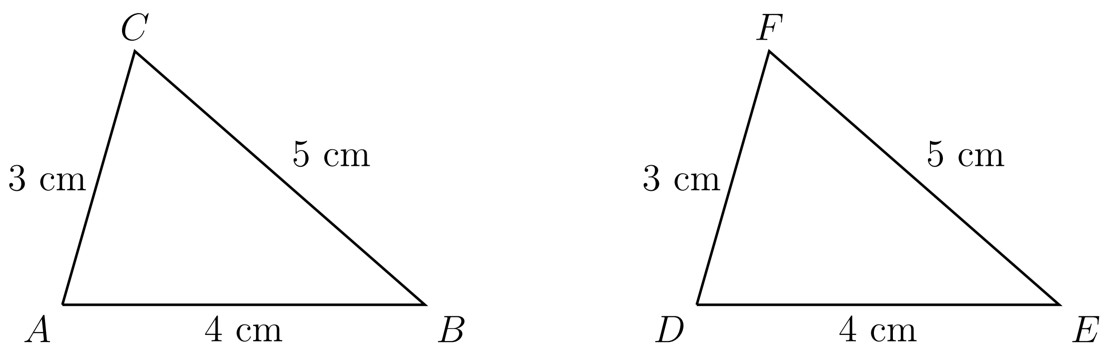
3.2 Les trois cas d'égalité

Pour démontrer que deux triangles sont égaux, il n'est pas nécessaire de connaître les six mesures (trois côtés et trois angles). Il suffit de vérifier l'un des trois cas suivants.

Premier cas : CCC (côté-côté-côté)

Si deux triangles ont leurs **trois côtés** deux à deux de même longueur, alors ces triangles sont égaux.

Exemple

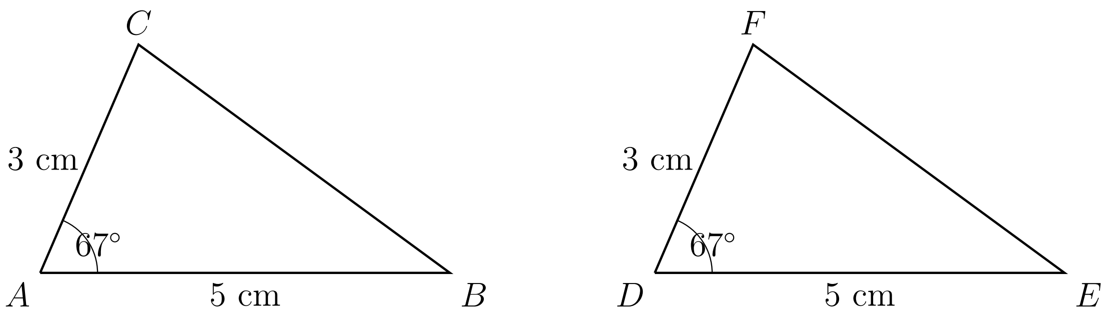


$AB = DE = 4$ cm, $AC = DF = 3$ cm et $BC = EF = 5$ cm.
Les trois côtés sont deux à deux de même longueur : d'après le cas CCC, les triangles ABC et DEF sont égaux.

Deuxième cas : CAC (côté-angle-côté)

Si deux triangles ont **deux côtés de même longueur** et **l'angle compris** entre ces côtés de même mesure, alors ces triangles sont égaux.

Exemple



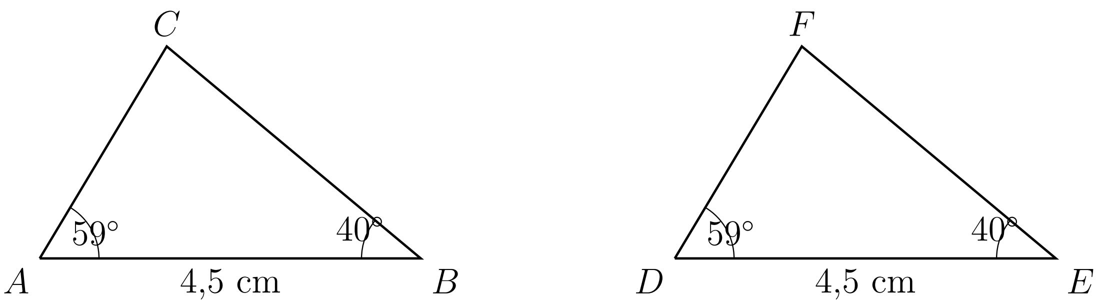
$AB = DE = 5$ cm, $AC = DF = 3$ cm et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 67^\circ$.

L'angle est **compris** entre les deux côtés de même longueur : d'après le cas CAC, les triangles ABC et DEF sont égaux.

Troisième cas : ACA (angle-côté-angle)

Si deux triangles ont **un côté de même longueur** et **les deux angles adjacents** à ce côté de même mesure, alors ces triangles sont égaux.

Exemple



$AB = DE = 4{,}5$ cm, $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 59^\circ$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 40^\circ$.

Le côté est **compris** entre les deux angles de même mesure : d'après le cas ACA, les triangles ABC et DEF sont égaux.

Attention

- Pour le cas CAC, l'angle doit être **compris entre** les deux côtés de même longueur. Un angle qui n'est pas entre les deux côtés ne permet pas de conclure.
- Avoir trois paires d'angles de même mesure ne suffit pas pour démontrer que deux triangles sont égaux : ils peuvent avoir la même forme mais des tailles différentes.

4. Rédiger une démonstration avec les cas d'égalité

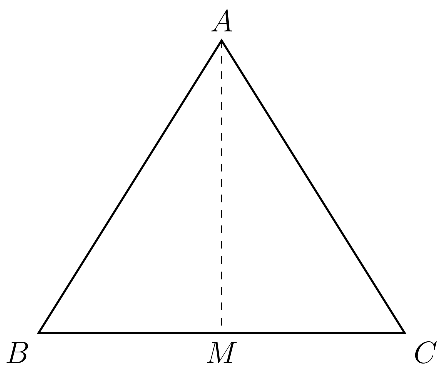
Pour utiliser un cas d'égalité dans une démonstration, on suit les étapes suivantes :

1. Identifier les deux triangles à comparer.
2. Lister les éléments égaux (longueurs, angles) en justifiant chacun.
3. Choisir le cas d'égalité adapté (CCC, CAC ou ACA) et conclure que les triangles sont égaux.
4. En déduire l'égalité de longueurs ou d'angles recherchée.

Exemple

ABC est un triangle isocèle en A ($AB = AC$). Le point M est le milieu de $[BC]$.

Démontrer que la droite (AM) est perpendiculaire à (BC).



On compare les triangles ABM et ACM :

- $AB = AC$ car le triangle ABC est isocèle en A.

- $BM = CM$ car M est le milieu de $[BC]$.
- $AM = AM$ (côté commun aux deux triangles).

Les triangles ABM et ACM ont leurs trois côtés deux à deux de même longueur. D'après le cas CCC, les triangles ABM et ACM sont égaux.
On en déduit que $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$.
Or $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ car les points B, M et C sont alignés.
Donc $2 \times \widehat{AMB} = 180^\circ$, ce qui donne $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
La droite (AM) est perpendiculaire à la droite (BC).

Les questions essentielles

1. Comment calculer un angle dans un triangle ?

On utilise la propriété de la somme des angles : la somme des trois angles vaut 180°. Si on connaît deux angles, on soustrait leur somme de 180° pour obtenir le troisième.

Voir la fiche méthode : Calculer un angle dans un triangle

2. Comment savoir si un triangle est constructible ?

On vérifie l'inégalité triangulaire : la plus grande longueur doit être strictement inférieure à la somme des deux autres.

Voir la fiche méthode : Vérifier si un triangle est constructible

3. Comment démontrer que deux triangles sont égaux ?

On identifie les éléments égaux entre les deux triangles (longueurs et angles), puis on choisit le cas d'égalité adapté : CCC (trois côtés), CAC (deux côtés et l'angle compris) ou ACA (un côté et les deux angles adjacents).

Voir la fiche méthode : Démontrer que deux triangles sont égaux

4. Comment utiliser les cas d'égalité dans une démonstration ?

> On commence par prouver que deux triangles sont égaux (en utilisant CCC, CAC ou ACA), puis on en déduit l'égalité de longueurs ou d'angles entre ces triangles. Cette conclusion permet de démontrer la propriété géométrique recherchée.

Voir la fiche méthode : Utiliser un cas d'égalité dans une démonstration

Télécharger en PDF