Translations et pavages

DURÉE ESTIMÉE

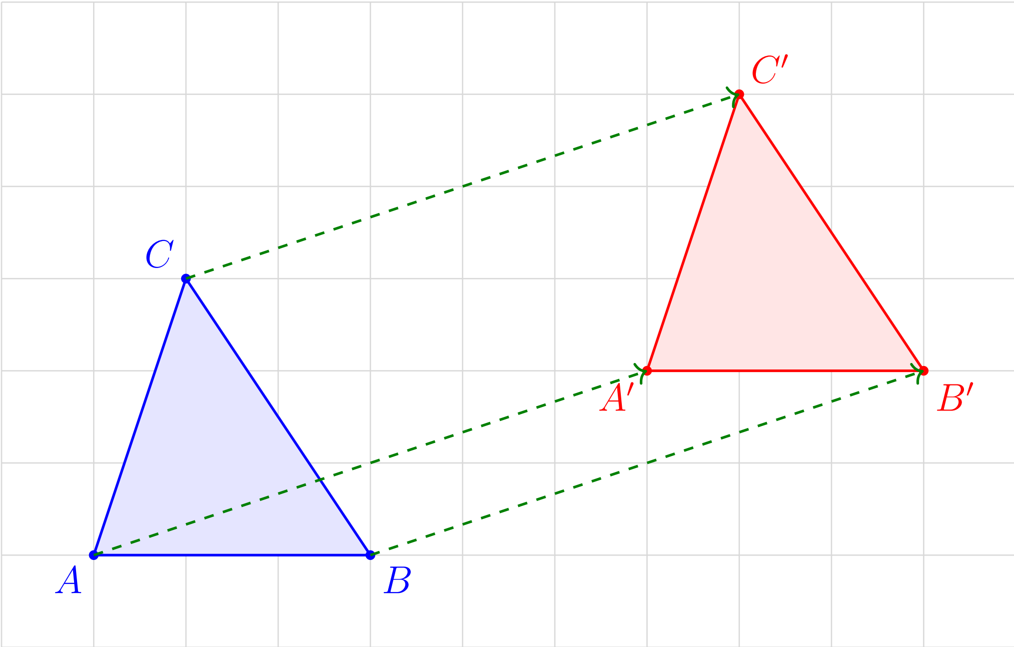
20 minutes

1. La translation

Translation

Transformer une figure par **translation**, c'est la faire glisser le long d'une droite, sans la tourner ni la déformer.
Une translation est définie par :

- une **direction** (celle de la droite le long de laquelle on glisse)
- un **sens** (de gauche à droite, de bas en haut, etc.)
- une **longueur** (la distance parcourue par chaque point)



Exemple

Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par une translation. Chaque point a glissé de 6 carreaux vers la droite et 2 carreaux vers le haut.
Les flèches vertes matérialisent ce déplacement : elles ont toutes la même direction, le même sens et la même longueur.
Les deux triangles sont superposables : la figure n'a été ni tournée, ni retournée, ni déformée.

Remarque

La translation est une **transformation du plan**, comme la symétrie axiale (vue en 6e) et la symétrie centrale (vue en 5e). Contrairement aux symétries, la translation ne retourne pas la figure.

2. Le vecteur de translation

Vecteur

Un **vecteur** est un objet mathématique caractérisé par :

- une **direction** (celle de la droite qui le porte)
- un **sens** (indiqué par la flèche)
- une **longueur** (aussi appelée **norme**)

Le vecteur d'origine A et d'extrémité B se note $\overrightarrow{AB}$.

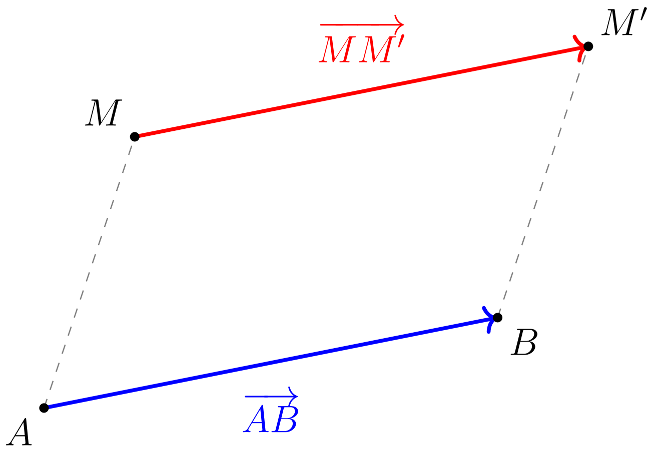
Translation de vecteur

La **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est la translation qui transforme le point A en le point B.

Si M' est l'image d'un point M par cette translation, alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

Lien avec le parallélogramme

Si M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati lorsque M appartient à la droite (AB)).



Exemple

Pour trouver l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on construit le point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme. Les côtés $[AB]$ et $[MM']$ sont parallèles et de même longueur. Les côtés $[AM]$ et $[BM']$ sont aussi parallèles et de même longueur.

Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.

Vecteurs égaux et parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Exemple

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: ces deux vecteurs ont la même direction (les droites (AB) et (DC) sont parallèles), le même sens et la même longueur ($AB = DC$).

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme D en C.

De même, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ transforme B en C.

3. Propriétés de la translation

Propriétés de conservation

Soient A', B', C' les images respectives des points A, B, C par une même translation. Cette translation conserve :

- les **longueurs** : $A'B' = AB$
- l'**alignement** : si A, B, C sont alignés, alors A', B', C' sont alignés
- les **angles** : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$
- le **parallélisme** : si $(AB)//(CD)$, alors $(A'B')//(C'D')$
- les **aires** : la figure et son image ont la même aire

Remarque

La figure et son image par une translation sont **superposables**. La translation ne modifie ni la forme ni les dimensions : elle change uniquement la position.

Exemple

Le triangle ABC est rectangle en B avec $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 5$ cm. Son image par une translation est le triangle $A'B'C'$.

Par conservation des longueurs : $A'B' = 3$ cm, $B'C' = 4$ cm et $A'C' = 5$ cm.

Par conservation des angles : le triangle $A'B'C'$ est rectangle en B'.

Par conservation des aires : l'aire de $A'B'C'$ vaut $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$ cm², comme celle de ABC.

4. Construire l'image d'une figure par translation

Remarque

Pour construire l'image d'une figure par translation, on construit l'image de **chaque sommet** séparément, puis on relie les images dans le même ordre.

Construction sur quadrillage

On veut construire l'image du rectangle $EFGH$ par la translation qui transforme I en J, sachant que J est situé 5 carreaux à droite et 3 carreaux vers le haut par rapport à I.
On applique le même déplacement (5 carreaux à droite, 3 vers le haut) à chaque sommet du rectangle :

- E donne E', F donne F', G donne G', H donne H'

On relie E', F', G', H' dans cet ordre pour obtenir le rectangle image $E'F'G'H'$.

Construction au compas

Sans quadrillage, on peut construire l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ en construisant le parallélogramme $ABM'M$:

1. Compas en M avec l'ouverture AB : tracer un arc de cercle.
2. Compas en B avec l'ouverture AM : tracer un arc qui coupe le premier.
3. L'intersection des deux arcs est le point M'.

Attention

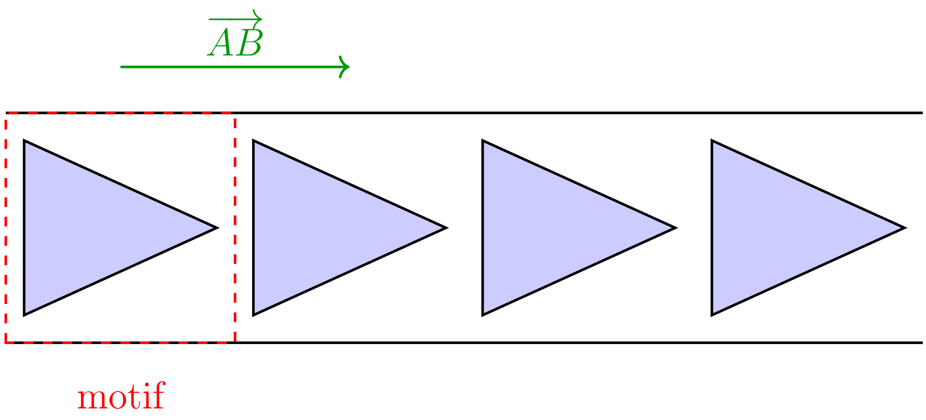
- Construire l'image de **chaque sommet** séparément, puis relier. Ne pas chercher à déplacer la figure entière d'un seul coup.

- Sur un quadrillage, vérifier que le même déplacement (même nombre de carreaux horizontaux et verticaux) est bien appliqué à chaque sommet.

5. Frises et pavages

Frise

Une **frise** est un dessin contenu dans une bande (entre deux droites parallèles) dont un **motif** se répète régulièrement dans une seule direction par translation.

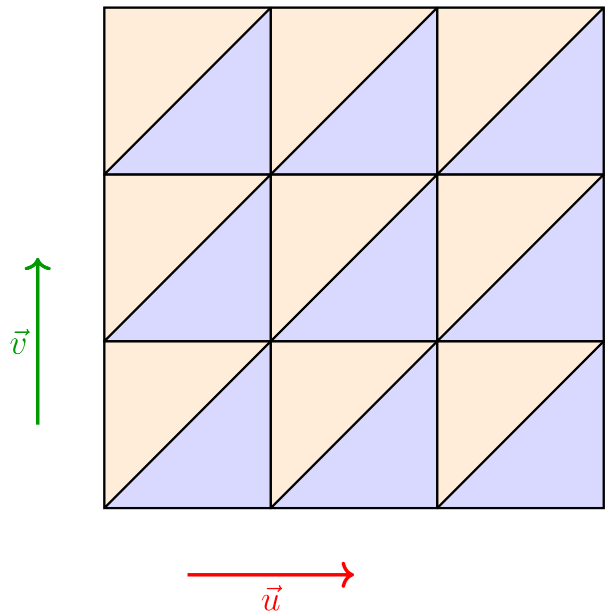


Exemple

La frise ci-dessus est construite à partir du motif encadré en rouge (un triangle). La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ permet de passer d'un motif au suivant : en appliquant cette translation plusieurs fois, on reproduit le motif tout au long de la bande.

Pavage

Un **pavage** (ou **dallage**) est un assemblage de figures qui recouvre le plan entier, sans trou ni superposition. Le motif est reproduit dans **deux directions** par des translations.



Exemple

Ce pavage est obtenu en reproduisant un motif carré (contenant deux triangles) par deux translations : la translation de vecteur $\vec{u}$ (vers la droite) et la translation de vecteur $\vec{v}$ (vers le haut). Le plan est entièrement recouvert sans trou ni superposition.

Remarque

- Dans une **frise**, le motif se répète dans une **seule direction** (le long de la bande).
- Dans un **pavage**, le motif se répète dans **deux directions** et recouvre tout le plan.

Les carrelages au sol, les murs en briques ou les motifs sur du papier peint sont des exemples courants de pavages.

Les questions essentielles

1. Comment construire l'image d'une figure par une translation ?

On repère le déplacement (horizontal et vertical sur un quadrillage, ou en construisant un parallélogramme au compas), puis on applique ce même déplacement à chaque sommet de la figure.

Voir la fiche méthode : Construire l'image d'une figure par une translation ↗

2. Comment reconnaître des vecteurs égaux ?

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. On vérifie ces trois critères, ou on utilise le lien avec les parallélogrammes.

Voir la fiche méthode : Identifier des vecteurs égaux ↗

3. Comment utiliser les propriétés de conservation de la translation ?

La translation conserve les longueurs, les angles, l'alignement, le parallélisme et les aires. On utilise ces propriétés pour déduire les caractéristiques de la figure image.

Voir la fiche méthode : Utiliser les propriétés de conservation de la translation ↗

4. Comment analyser une frise ou un pavage ?

On identifie le motif qui se répète, puis on repère la ou les translations qui permettent de passer d'un motif au suivant. Une frise utilise une seule translation, un pavage en utilise deux.

Voir la fiche méthode : Analyser une frise et identifier la translation ↗