# Théorème de Thalès

DURÉE ESTIMÉE

**20 minutes**

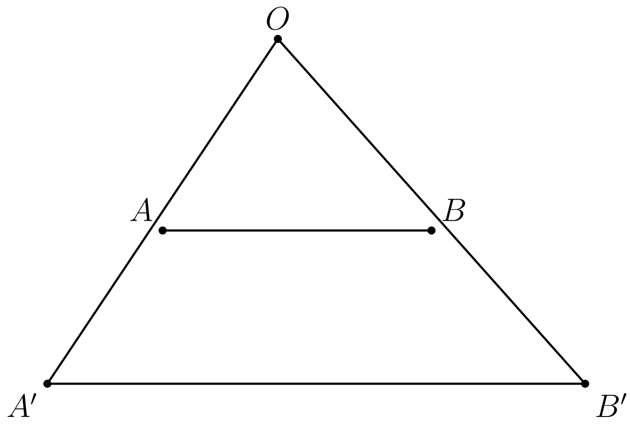
## 1. Triangles emboîtés

### Triangles emboîtés

Deux triangles $OAB$ et $OA'B'$ sont dits **emboîtés** lorsque :

- les points $O$, $A$, $A'$ sont alignés ($A'$ est sur la demi-droite $[OA)$)
- les points $O$, $B$, $B'$ sont alignés ($B'$ est sur la demi-droite $[OB)$)

Le point $O$ est le **sommet commun** des deux triangles.




### Remarque

Le petit triangle est **à l'intérieur** du grand triangle. Le point $A$ peut être entre $O$ et $A'$, ou bien $A'$ peut être entre $O$ et $A$ : dans les deux cas, les triangles sont emboîtés.

## 2. Théorème de Thalès

### Théorème de Thalès

Soient $OAB$ et $OA'B'$ deux triangles emboîtés.

Si les droites $(AB)$ et $(A'B')$ sont parallèles, alors :

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

### Remarque

Ce théorème signifie que les côtés des deux triangles sont **proportionnels**.
On peut présenter cette proportionnalité dans un tableau :

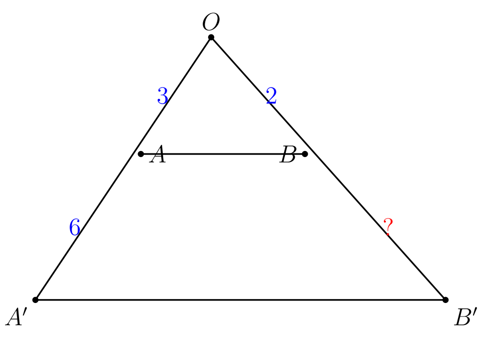
| | | | |
|---|---|---|---|
| Triangle $OAB$ | $OA$ | $OB$ | $AB$ |
| Triangle $OA'B'$ | $OA'$ | $OB'$ | $A'B'$ |

Il faut bien respecter la correspondance entre les sommets : $O$ avec $O$, $A$ avec $A'$ et $B$ avec $B'$.

### Calculer une longueur (cas 1)

Les triangles $OAB$ et $OA'B'$ sont emboîtés et $(AB)//(A'B')$.

On donne : $OA = 3$ cm, $AA' = 6$ cm et $OB = 2$ cm. Calculer $OB'$.




On calcule d'abord $OA'$ :

$OA' = OA + AA' = 3 + 6 = 9$ cm

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{2}{OB'}$$

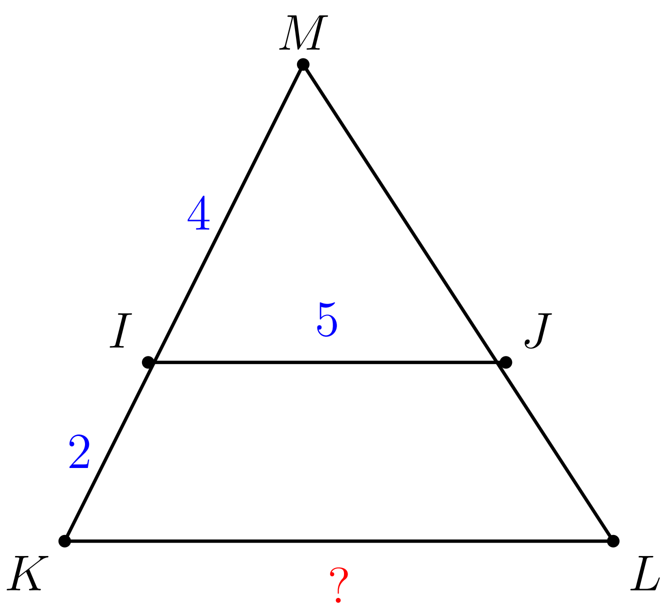
Par produit en croix :

$$OB' = \frac{2 \times 9}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm}$$

### Calculer une longueur (cas 2)

Les triangles $MIJ$ et $MKL$ sont emboîtés et $(IJ)//(KL)$.

On donne : $MI = 4$ cm, $IK = 2$ cm et $IJ = 5$ cm. Calculer $KL$.




On calcule d'abord $MK$ :

$MK = MI + IK = 4 + 2 = 6$ cm

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{MI}{MK} = \frac{IJ}{KL}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{5}{KL}$$

Par produit en croix :

$$KL = \frac{5 \times 6}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5 \text{ cm}$$

**Attention**

- Ne pas oublier de vérifier que les droites sont bien **parallèles** et que les points sont bien **alignés** avant d'appliquer le théorème.
- Bien repérer les côtés qui se correspondent dans les deux triangles.
- Quand la longueur cherchée n'est pas directement un côté du triangle (par exemple $AA'$), calculer d'abord le côté correspondant ($OA'$) puis en déduire la longueur demandée.

## 3. Réciproque du théorème de Thalès

**Réciproque du théorème de Thalès**

Soient $OAB$ et $OA'B'$ deux triangles emboîtés tels que les points $O$, $A$, $A'$ et les points $O$, $B$, $B'$ soient dans le même ordre.

Si $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$, alors les droites $(AB)$ et $(A'B')$ sont parallèles.

**Remarque**

- La réciproque sert à **démontrer que deux droites sont parallèles**.

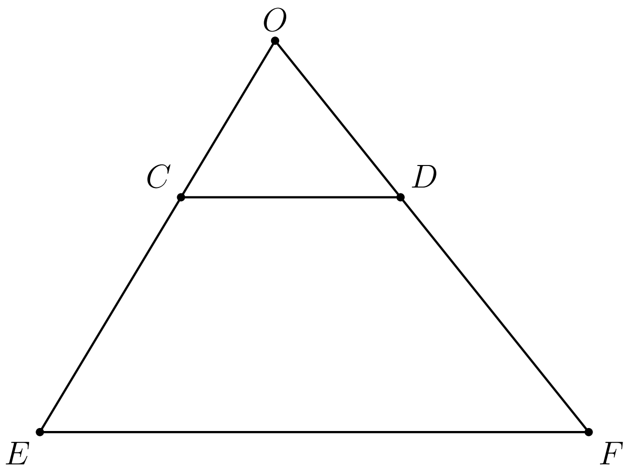
- Calculer **séparément** chaque rapport, puis comparer. Ne jamais écrire l'égalité des rapports avant d'avoir vérifié qu'ils sont bien égaux.
- Vérifier que les points sont dans le **même ordre**.

## Démontrer que deux droites sont parallèles

Les triangles $OCD$ et $OEF$ sont emboîtés avec $C$ entre $O$ et $E$, $D$ entre $O$ et $F$.

On donne : $OC = 4$ cm, $OE = 10$ cm, $OD = 3$ cm et $OF = 7{,}5$ cm.

Les droites $(CD)$ et $(EF)$ sont-elles parallèles ?




Les points $O$, $C$, $E$ et les points $O$, $D$, $F$ sont dans le même ordre.

On calcule séparément chaque rapport :

$$\frac{OC}{OE} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{OD}{OF} = \frac{3}{7{,}5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

On constate que $\dfrac{OC}{OE} = \dfrac{OD}{OF}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites $(CD)$ et $(EF)$ sont parallèles.

### Contraposée du théorème de Thalès

Soient $OAB$ et $OA'B'$ deux triangles emboîtés.

Si $\dfrac{OA}{OA'} \neq \dfrac{OB}{OB'}$, alors les droites $(AB)$ et $(A'B')$ ne sont **pas** parallèles.

### Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

Les triangles $OPQ$ et $ORS$ sont emboîtés avec $P$ entre $O$ et $R$, $Q$ entre $O$ et $S$.

On donne : $OP = 6$ cm, $OR = 9$ cm, $OQ = 4$ cm et $OS = 5$ cm.

Les droites $(PQ)$ et $(RS)$ sont-elles parallèles ?

On calcule séparément chaque rapport :

$$\frac{OP}{OR} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{OQ}{OS} = \frac{4}{5}$$

On constate que $\dfrac{OP}{OR} \neq \dfrac{OQ}{OS}$ (car $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{4}{5}$).

Si les droites $(PQ)$ et $(RS)$ étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès on aurait $\dfrac{OP}{OR} = \dfrac{OQ}{OS}$. Ce n'est pas le cas, donc les droites $(PQ)$ et $(RS)$ ne sont pas parallèles.

# 4. Agrandissement et réduction

### Agrandissement et réduction

Un **agrandissement** de coefficient $k$ (avec $k > 1$) est une transformation qui multiplie toutes les longueurs d'une figure par $k$.

Une **réduction** de coefficient $k$ (avec $0 < k < 1$) est une transformation qui multiplie toutes les longueurs d'une figure par $k$.

Le nombre $k$ est appelé **coefficient d'agrandissement** ou **de réduction**.

### Effet sur les longueurs

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de coefficient $k$, toutes les longueurs sont multipliées par $k$.

### Effet sur les aires

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de coefficient $k$, toutes les aires sont multipliées par $k^2$.

### Effet sur les volumes

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de coefficient $k$, tous les volumes sont multipliés par $k^3$.

### Agrandissement

Un rectangle mesure $4$ cm de large et $6$ cm de long. On réalise un agrandissement de coefficient $k = 3$.

**Longueurs :** les nouvelles dimensions sont $4 \times 3 = 12$ cm et $6 \times 3 = 18$ cm.

**Aire :** l'aire initiale est $4 \times 6 = 24$ cm². L'aire de l'agrandissement est $24 \times 3^2 = 24 \times 9 = 216$ cm².

On vérifie : $12 \times 18 = 216$ cm².

### Réduction

Un cube a une arête de $12$ cm. On réalise une réduction de coefficient $k = \dfrac{1}{3}$.

**Arête :** la nouvelle arête mesure $12 \times \dfrac{1}{3} = 4$ cm.

**Volume :** le volume initial est $12^3 = 1\,728$ cm³. Le volume réduit est $1\,728 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = 1\,728 \times \dfrac{1}{27} = 64$ cm³.

On vérifie : $4^3 = 64$ cm³.

**Attention**

- Pour les **longueurs**, multiplier par $k$.
- Pour les **aires**, multiplier par $k^2$ (et non par $k$).
- Pour les **volumes**, multiplier par $k^3$ (et non par $k$ ou $k^2$).

**Remarque**

Dans une configuration de Thalès, le triangle $OA'B'$ est un agrandissement du triangle $OAB$ de coefficient $k = \dfrac{OA'}{OA}$ lorsque $OA' > OA$, ou une réduction lorsque $OA' < OA$.

## Les questions essentielles

### 1. Comment calculer une longueur avec le théorème de Thalès ?

Il faut repérer les triangles emboîtés et les droites parallèles, écrire l'égalité des trois rapports, puis utiliser le produit en croix pour trouver la longueur inconnue.

**Voir la fiche méthode :** Calculer une longueur avec le théorème de Thalès ↗

### 2. Comment démontrer que deux droites sont parallèles avec Thalès ?

On calcule séparément deux rapports de longueurs. S'ils sont égaux et que les points sont dans le même ordre, on conclut avec la réciproque du théorème de Thalès.

**Voir la fiche méthode :** Déterminer si deux droites sont parallèles avec Thalès ↗

### 3. Comment calculer une longueur qui n'est pas un côté du triangle ?

Quand la longueur cherchée n'est pas directement un côté des triangles emboîtés, on exprime les côtés en fonction de cette longueur, puis on résout l'équation obtenue avec le produit en croix.

**Voir la fiche méthode :** Calculer une longueur intermédiaire avec Thalès ↗

**4. Comment calculer les dimensions d'un agrandissement ou d'une réduction ?**

On identifie le coefficient $k$, puis on multiplie les longueurs par $k$, les aires par $k^2$ et les volumes par $k^3$.

**Voir la fiche méthode :** Appliquer un agrandissement ou une réduction ↗