THÉORÈME DE PYTHAGORE

COURS

Théorème de Pythagore

DURÉE ESTIMÉE

15 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

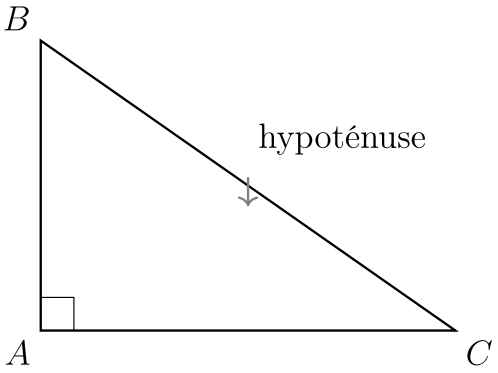
- Calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle
- Calculer un côté de l'angle droit
- Démontrer qu'un triangle est rectangle
- Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

1. Triangle rectangle et hypoténuse

Triangle rectangle et hypoténuse

Un triangle est **rectangle** lorsque l'un de ses angles est un angle droit ($90°$).

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse**. C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Exemple

Le triangle ABC ci-dessus est rectangle en A. L'angle droit est en A, donc le côté opposé à A est $[BC]$: c'est l'hypoténuse du triangle ABC.

Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont les côtés de l'angle droit.

2. Théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit.

Si le triangle ABC est rectangle en A, alors :

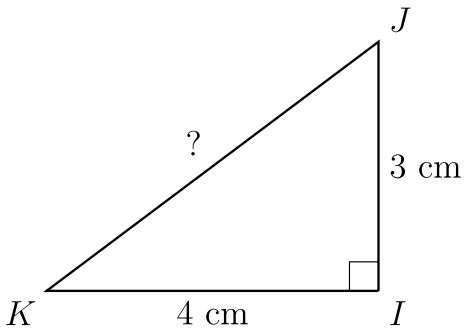
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Remarque

Pour trouver une longueur à partir de son carré, on utilise la **racine carrée** : si $x^2 = a$ avec $a \geqslant 0$, alors $x = \sqrt{a}$.

Calculer la longueur de l'hypoténuse

Le triangle IJK est rectangle en I tel que $IJ = 3$ cm et $IK = 4$ cm. Calculer JK.



Le triangle IJK est rectangle en I, donc $[JK]$ est l'hypoténuse.

D'après le théorème de Pythagore :

$JK^2 = IJ^2 + IK^2$

$JK^2 = 3^2 + 4^2$

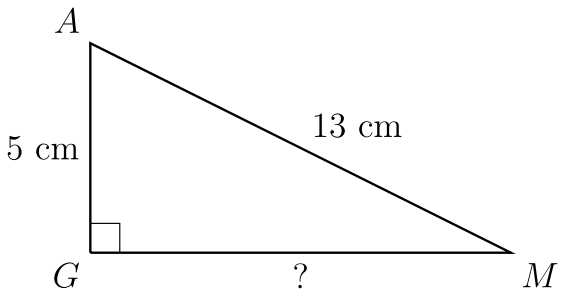
$JK^2 = 9 + 16$

$JK^2 = 25$

$JK = \sqrt{25} = 5$ cm

Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

Le triangle GAM est rectangle en G tel que $AM = 13$ cm et $AG = 5$ cm. Calculer GM.



Le triangle GAM est rectangle en G, donc $[AM]$ est l'hypoténuse.

D'après le théorème de Pythagore :

$AM^2 = AG^2 + GM^2$

$13^2 = 5^2 + GM^2$

$169 = 25 + GM^2$

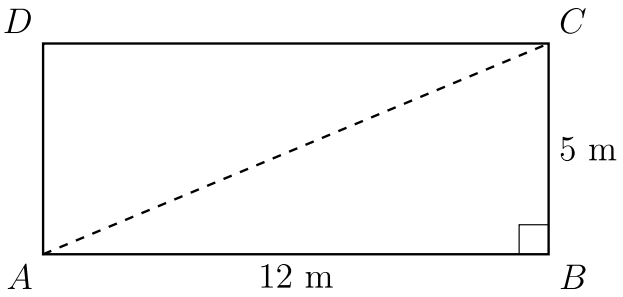
$GM^2 = 169 - 25$

$GM^2 = 144$

$GM = \sqrt{144} = 12$ cm

Problème concret

Un terrain de sport rectangulaire mesure 12 m de long et 5 m de large. Calculer la longueur de sa diagonale.



Le rectangle $ABCD$ a un angle droit en B, donc le triangle ABC est rectangle en B.

D'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 12^2 + 5^2$

$AC^2 = 144 + 25$

$AC^2 = 169$

$AC = \sqrt{169} = 13$ m

La diagonale du terrain mesure 13 m.

Attention

- L'hypoténuse est toujours **seule** dans un membre de l'égalité de Pythagore.
- Si on cherche l'hypoténuse, on **additionne** les carrés des deux autres côtés.
- Si on cherche un côté de l'angle droit, on **soustrait** le carré du côté connu au carré de l'hypoténuse.
- Ne pas oublier d'extraire la racine carrée à la fin pour obtenir la longueur.

3. Réciproque du théorème de Pythagore

Réciproque du théorème de Pythagore

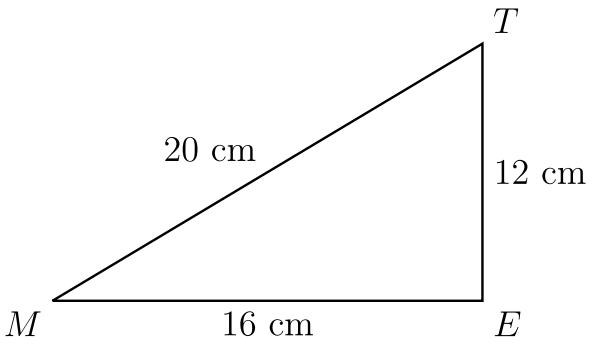
Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est opposé au plus grand côté.

Remarque

La réciproque sert à **démontrer** qu'un triangle est rectangle lorsqu'on connaît les longueurs de ses trois côtés.

Exemple

Soit un triangle MET tel que $ME = 16$ cm, $ET = 12$ cm et $MT = 20$ cm. Le triangle MET est-il rectangle ?



Le plus grand côté est $[MT]$ avec $MT = 20$ cm.

On calcule séparément :

$MT^2 = 20^2 = 400$

$ME^2 + ET^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$

On constate que $MT^2 = ME^2 + ET^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MET est rectangle en E.

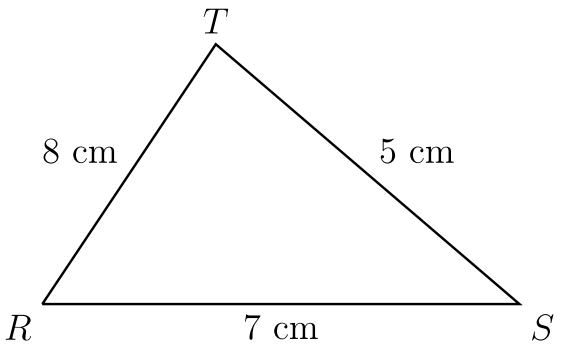
4. Contraposée du théorème de Pythagore

Contraposée du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Exemple

Soit un triangle RST tel que $RS = 7$ cm, $ST = 5$ cm et $RT = 8$ cm. Le triangle RST est-il rectangle ?



Le plus grand côté est $[RT]$ avec $RT = 8$ cm.

On calcule séparément :

$RT^2 = 8^2 = 64$

$RS^2 + ST^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$

On constate que $RT^2 \neq RS^2 + ST^2$ (car $64 \neq 74$).

D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle RST n'est pas rectangle.

Les questions essentielles

1. Comment calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle ?

On applique le théorème de Pythagore : le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit. On additionne les deux carrés, puis on extrait la racine carrée.

Voir la fiche méthode : Calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle

2. Comment calculer un côté de l'angle droit ?

On utilise le théorème de Pythagore en isolant le côté cherché : on soustrait le carré du côté connu au carré de l'hypoténuse, puis on extrait la racine carrée.

Voir la fiche méthode : Calculer un côté de l'angle droit

3. Comment démontrer qu'un triangle est rectangle ?

On utilise la réciproque du théorème de Pythagore : on compare le carré du plus grand côté avec la somme des carrés des deux autres. S'ils sont égaux, le triangle est rectangle.

Voir la fiche méthode : Démontrer qu'un triangle est rectangle

4. Comment démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle ?

On utilise la contraposée du théorème de Pythagore : on compare le carré du plus grand côté avec la somme des carrés des deux autres. S'ils sont différents, le triangle n'est pas rectangle.

Voir la fiche méthode : Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle