Solides et volumes

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

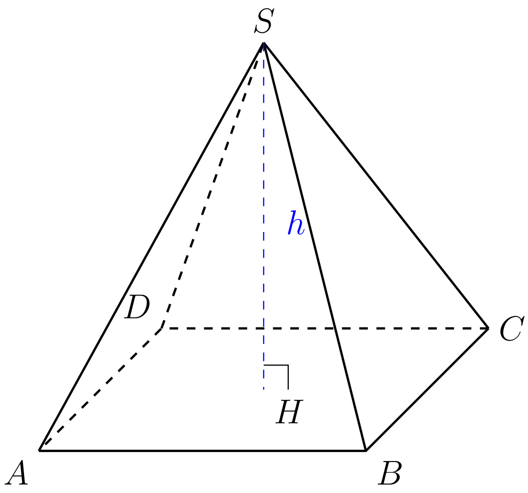
1. Pyramide

Pyramide

Une **pyramide** est un solide qui possède :

- une face appelée **base**, qui est un polygone (triangle, carré, rectangle...)
- un point appelé **sommet**, situé en dehors du plan de la base
- des **faces latérales** triangulaires reliant chaque côté de la base au sommet

La **hauteur** de la pyramide est le segment issu du sommet, perpendiculaire au plan de la base.



Exemple

La pyramide $SABCD$ ci-dessus a pour base le carré $ABCD$ et pour sommet S.

Elle possède quatre faces latérales : les triangles SAB, SBC, SCD et SDA.

Le segment $[SH]$ est la hauteur : il est perpendiculaire au plan de la base.

En **perspective cavalière**, les arêtes cachées ($[CD]$, $[DA]$ et $[SD]$) sont tracées en pointillés.

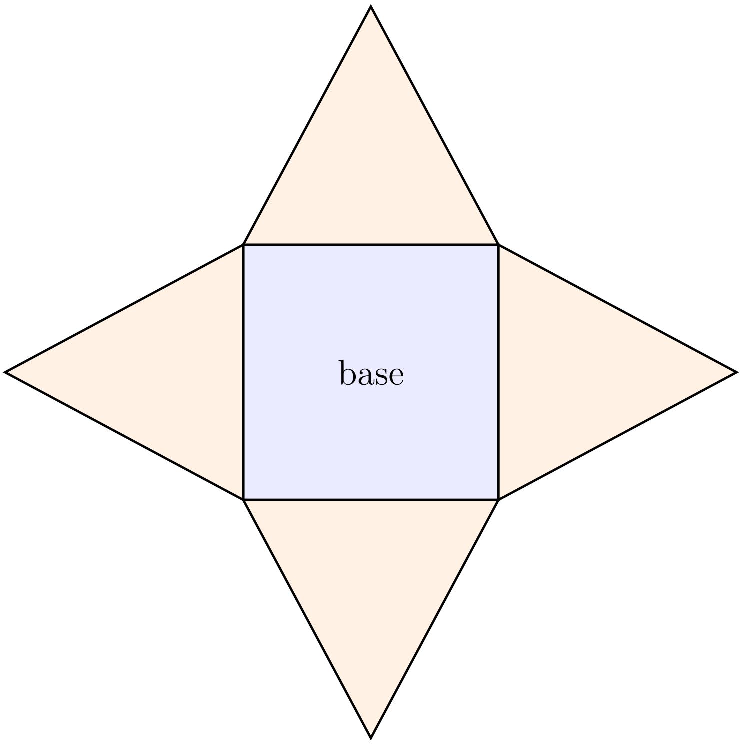
Remarque

La **perspective cavalière** est la technique de représentation des solides sur une feuille :

- les arêtes visibles sont en trait plein
- les arêtes cachées sont en pointillés

Patron d'une pyramide

Le patron d'une pyramide est composé de la **base** (en vraie grandeur) et d'autant de **triangles** que la base a de côtés. Chaque triangle a pour base un côté du polygone.



2. Cône de révolution

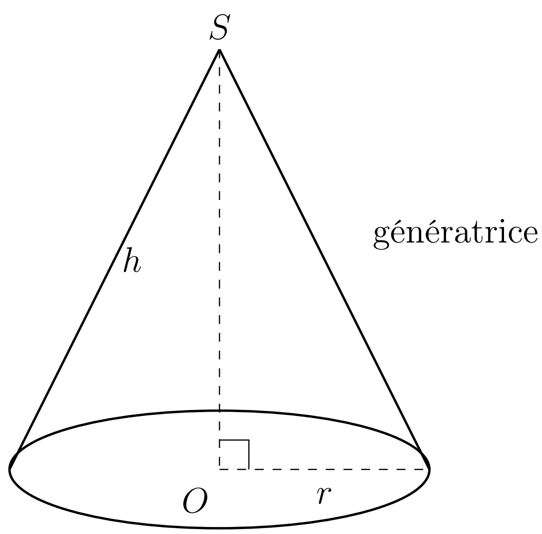
Cône de révolution

Un **cône de révolution** est un solide qui possède :

- une **base** en forme de disque, de centre O et de rayon r
- un **sommet** S situé sur la perpendiculaire à la base passant par O

La **hauteur** du cône est la longueur SO.

Une **génératrice** est un segment reliant le sommet S à un point du cercle de base. Toutes les génératrices ont la même longueur.



Exemple

Le cône ci-dessus a pour sommet S et pour base le disque de centre O et de rayon r.

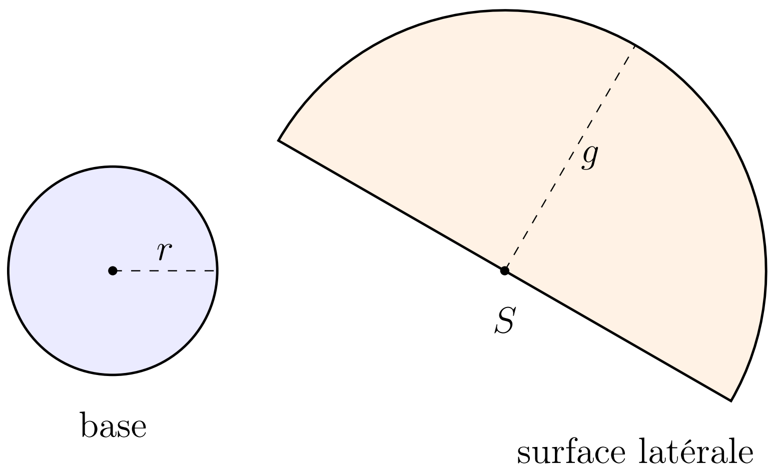
La hauteur $h = SO$ est perpendiculaire à la base.

On obtient un cône de révolution en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit.

Patron d'un cône de révolution

Le patron d'un cône de révolution est composé de :

- un **disque** de rayon r (la base)
- un **secteur de disque** dont le rayon est égal à la longueur de la génératrice (la surface latérale)



3. Volume d'une pyramide et d'un cône

Volume d'une pyramide

Le volume d'une pyramide est :

$$V = \frac{\text{Aire de la base} \times h}{3}$$

où h est la hauteur de la pyramide.

Volume d'une pyramide à base carrée

Une pyramide a pour base un carré de côté 6 cm et pour hauteur $h = 10$ cm.
L'aire de la base vaut :
$\mathcal{A} = 6 \times 6 = 36$ cm²
Le volume vaut :
$V = \dfrac{36 \times 10}{3} = \dfrac{360}{3} = 120$ cm³

Volume d'une pyramide à base rectangulaire

Une pyramide a pour base un rectangle de 5 cm sur 3 cm et pour hauteur $h = 8$ cm.

L'aire de la base vaut :
$\mathcal{A} = 5 \times 3 = 15$ cm²

Le volume vaut :

$V = \dfrac{15 \times 8}{3} = \dfrac{120}{3} = 40$ cm³

Volume d'un cône de révolution

Le volume d'un cône de révolution de rayon de base r et de hauteur h est :

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$$

Volume d'un cône

Un cône de révolution a un rayon de base $r = 5$ cm et une hauteur $h = 12$ cm.

$V = \dfrac{\pi \times 5^2 \times 12}{3}$

$V = \dfrac{\pi \times 25 \times 12}{3}$

$V = \dfrac{300\pi}{3}$

$V = 100\pi$ cm³

$V \approx 314{,}2$ cm³

Attention

- Ne pas oublier de **diviser par** 3 dans la formule du volume.

- Vérifier que la base et la hauteur sont dans la **même unité** avant de calculer.
- Pour le cône, l'aire de la base circulaire est πr^2 : la formule $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$ s'applique directement.

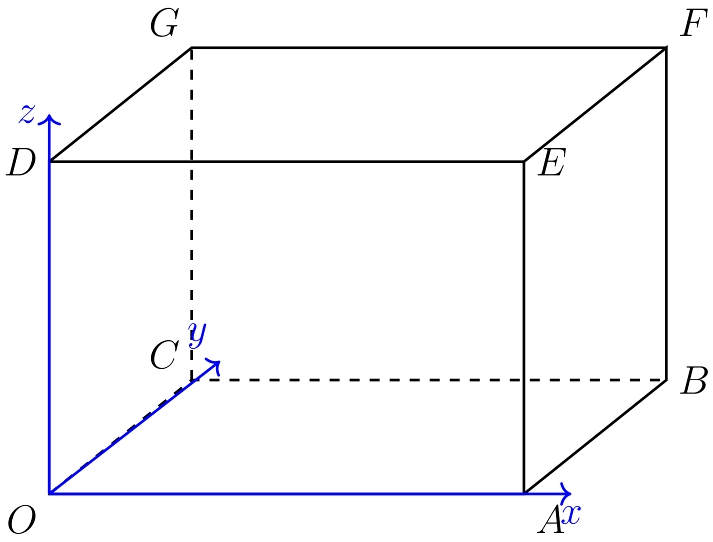
4. Se repérer dans l'espace

Coordonnées dans un pavé droit

Dans un parallélépipède rectangle (pavé droit), on repère un point M à partir d'un sommet pris comme origine O et de trois arêtes issues de O servant d'axes :

- l'**axe des abscisses** (Ox)
- l'**axe des ordonnées** (Oy)
- l'**axe des cotes** (Oz), aussi appelé axe des altitudes

Les **coordonnées** du point M sont notées $(x_M \,;\, y_M \,;\, z_M)$.



Exemple

Le pavé droit $OABCDEFG$ ci-dessus a pour dimensions $OA = 6$, $OC = 3$ et $OD = 4$.

Les axes sont portés par les arêtes $[OA]$ (abscisses), $[OC]$ (ordonnées) et $[OD]$ (cotes).

Pour trouver les coordonnées d'un sommet, on suit les arêtes parallèles à chaque axe depuis l'origine :

- $O(0\,;\,0\,;\,0)$
- $A(6\,;\,0\,;\,0)$
- $B(6\,;\,3\,;\,0)$
- $C(0\,;\,3\,;\,0)$
- $D(0\,;\,0\,;\,4)$
- $E(6\,;\,0\,;\,4)$
- $F(6\,;\,3\,;\,4)$

- $G(0\,;\,3\,;\,4)$

Remarque

L'ordre des coordonnées est toujours le même : **abscisse** (x), puis **ordonnée** (y), puis **cote** (z). Ne pas les confondre.

5. Unités de volume et agrandissement-réduction

Conversions d'unités de volume

Les unités de volume sont liées par un facteur $1\,000$:

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

La correspondance avec les litres est :

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$$

Exemple

Convertir :
$57 \text{ dm}^3 = 57 \text{ L}$ car $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$.

$0{,}5\ \text{m}^3 = 0{,}5 \times 1\,000 = 500\ \text{dm}^3 = 500\ \text{L}.$

$267\ \text{cm}^3 = \dfrac{267}{1\,000} = 0{,}267\ \text{dm}^3 = 0{,}267\ \text{L}.$

Conversions de vitesse

Pour les unités de vitesse composées :

- pour convertir des km/h en m/s, on **divise par** $3{,}6$
- pour convertir des m/s en km/h, on **multiplie par** $3{,}6$

En effet : $1\ \text{km/h} = \dfrac{1\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = \dfrac{1}{3{,}6}\ \text{m/s}.$

Exemple

Un cycliste roule à 36 km/h. Convertir en m/s.

$36\ \text{km/h} = \dfrac{36}{3{,}6} = 10\ \text{m/s}$

Effet d'un agrandissement-réduction sur les volumes

Lorsqu'on multiplie toutes les longueurs d'un solide par un coefficient k :

- les longueurs sont multipliées par k
- les aires sont multipliées par k^2
- les **volumes sont multipliés par** k^3

Exemple

On agrandit un cône en multipliant toutes ses dimensions par 2.

Le rayon passe de r à $2r$ et la hauteur de h à $2h$.

Le nouveau volume est :

$$V' = \frac{\pi \times (2r)^2 \times 2h}{3} = \frac{\pi \times 4r^2 \times 2h}{3} = 8 \times \frac{\pi r^2 h}{3} = 8V$$

Le volume est bien multiplié par $2^3 = 8$.

Attention

Ne pas confondre les effets de l'agrandissement : si on double les dimensions, l'aire est multipliée par 4 (et non par 2) et le volume est multiplié par 8 (et non par 2).

Les questions essentielles

1. Comment calculer le volume d'une pyramide ?

On calcule d'abord l'aire de la base (selon sa forme : carré, rectangle, triangle...), puis on applique la formule $V = \dfrac{\text{Aire de la base} \times h}{3}$.

Voir la fiche méthode : Calculer le volume d'une pyramide ↗

2. Comment calculer le volume d'un cône de révolution ?

On identifie le rayon de base r et la hauteur h, puis on applique la formule $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

Voir la fiche méthode : Calculer le volume d'un cône de révolution ↗

3. Comment lire les coordonnées d'un point dans un pavé droit ?

On part de l'origine O et on suit les arêtes parallèles à chaque axe pour rejoindre le point. Le premier nombre est l'abscisse (x), le deuxième l'ordonnée (y), le troisième la cote (z).

Voir la fiche méthode : Se repérer dans un pavé droit ↗

4. Comment convertir des unités de volume ?

On utilise la relation $1\ \mathrm{dm}^3 = 1\ \mathrm{L}$ et le facteur $\times 1\,000$ entre chaque unité successive (m^3, dm^3, cm^3, mm^3).

Voir la fiche méthode : Convertir des unités de volume ↗