Puissances et écriture scientifique

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

1 - Puissance d'un nombre

Définition

Soit a un nombre relatif et n un nombre entier supérieur ou égal à 2.

Le **produit de n facteurs** tous égaux à a se note a^n et se lit « a exposant n » :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Le nombre n s'appelle l'**exposant** et a la **base**.

Exemple

- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

- $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
- $0{,}1^3 = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}001$

Cas particuliers

Pour tout nombre relatif a non nul :

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$

Exemple

$7^1 = 7$, $(-5)^0 = 1$, $100^0 = 1$.

Attention

Attention à la place des parenthèses avec les nombres négatifs :

- $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$: le signe négatif fait partie de la base.
- $-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$: seul 2 est élevé à la puissance 4, puis on applique le signe $-$.

Signe d'une puissance

Pour tout nombre relatif a négatif et tout entier $n \geqslant 1$:

- si n est **pair**, alors a^n est **positif** ;
- si n est **impair**, alors a^n est **négatif**.

Exemple

- $(-3)^2 = 9 > 0$ (exposant pair).
- $(-3)^3 = -27 < 0$ (exposant impair).

Remarque

Dans une expression sans parenthèses, les puissances se calculent **avant** les multiplications, les divisions, les additions et les soustractions.

Exemple

Calculer $A = 1 + 3 \times 2^3$.

On commence par la puissance : $2^3 = 8$.

Puis la multiplication : $3 \times 8 = 24$.

Enfin l'addition : $A = 1 + 24 = 25$.

2 - Puissance d'exposant négatif

Définition

Soit a un nombre relatif **non nul** et n un nombre entier strictement positif.

Le nombre a^{-n} désigne l'**inverse** du nombre a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
- $7^{-1} = \frac{1}{7}$

Avec une base négative

$$(-7)^{-3} = \frac{1}{(-7)^3} = \frac{1}{-343} = -\frac{1}{343}$$

3 - Puissances de 10

Puissances de 10 positives

Pour tout entier n strictement positif :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\underbrace{0\,0\ldots0}_{n \text{ zéros}}$$

Exemple

- $10^1 = 10$ (un zéro)
- $10^3 = 1\,000$ (trois zéros)
- $10^6 = 1\,000\,000$ (un million, six zéros)
- $10^9 = 1\,000\,000\,000$ (un milliard, neuf zéros)

Puissances de 10 négatives

Pour tout entier n strictement positif :

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0{,}\underbrace{0\,0\ldots0}_{n-1 \text{ zéros}}1$$

Exemple

- $10^{-1} = 0{,}1$ (un dixième)
- $10^{-3} = 0{,}001$ (un millième)
- $10^{-6} = 0{,}000\,001$ (un millionième)

Remarque

Multiplier par 10^n $(n > 0)$ revient à décaler la virgule de n rangs vers la **droite**.
Multiplier par 10^{-n} $(n > 0)$ revient à décaler la virgule de n rangs vers la **gauche**.

Exemple

- $3{,}45 \times 10^4 = 34\,500$
- $72 \times 10^{-3} = 0{,}072$

4 - Règles de calcul sur les puissances

Produit de puissances de même base

Pour a non nul et n, m entiers relatifs :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

On **additionne** les exposants.

Exemple

$3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6 = 729$

$10^5 \times 10^{-2} = 10^{5+(-2)} = 10^3 = 1\,000$

Quotient de puissances de même base

Pour a non nul et n, m entiers relatifs :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

On **soustrait** les exposants.

Exemple

$$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4 = 625$$

$$\frac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3} = 0{,}001$$

Puissance d'une puissance

Pour a non nul et n, m entiers relatifs :

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

On **multiplie** les exposants.

Exemple

$$\left(10^3\right)^2 = 10^{3\times 2} = 10^6$$

$$\left(2^4\right)^{-1} = 2^{4\times(-1)} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

Puissance d'un produit

Pour a et b non nuls et n entier relatif :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Exemple

$(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1\,000$

$4^3 \times 25^3 = (4 \times 25)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$

Attention

Les règles du produit et du quotient ne s'appliquent que si les **bases sont identiques**. On ne peut pas simplifier $2^3 \times 3^4$ avec ces règles.

5 - Écriture scientifique

Définition

L'**écriture scientifique** d'un nombre décimal positif est l'écriture de la forme :

$$a \times 10^n$$

avec :

- a un nombre décimal tel que $1 \leqslant a < 10$ (un seul chiffre non nul avant la virgule) ;
- n un entier relatif.

Exemple

- $384\,400 = 3{,}844 \times 10^5$ (distance Terre-Lune en km).
- $0{,}000\,028 = 2{,}8 \times 10^{-5}$ (diamètre d'un globule blanc en m).
- $1\,785\,000\,000 = 1{,}785 \times 10^9$.

Méthode

Pour déterminer l'écriture scientifique d'un nombre :

1. Placer la virgule juste après le premier chiffre non nul pour obtenir a.
2. Compter le nombre de positions dont la virgule a été déplacée.
3. Si le nombre de départ est supérieur ou égal à 10, l'exposant n est **positif**. S'il est compris entre 0 et 1 (exclu), l'exposant n est **négatif**.

Passage inverse

Donner l'écriture décimale de $4{,}56 \times 10^{-3}$.

L'exposant est -3 : on déplace la virgule de 3 rangs vers la gauche.

$$4{,}56 \times 10^{-3} = 0{,}004\,56$$

Remarque

Pour un nombre **négatif**, on applique la même méthode sur sa valeur absolue, puis on ajoute le signe $-$.

$$-52\,000 = -5{,}2 \times 10^{4}$$

6 - Préfixes et ordres de grandeur

Préfixes des puissances de 10

Les scientifiques utilisent des préfixes pour désigner les multiples et sous-multiples des unités de mesure.

Préfixe	Symbole	Puissance de 10	Valeur
giga	G	10^9	$1\,000\,000\,000$
méga	M	10^6	$1\,000\,000$
kilo	k	10^3	$1\,000$
(unité)	—	10^0	1
milli	m	10^{-3}	$0{,}001$
micro	µ	10^{-6}	$0{,}000\,001$
nano	n	10^{-9}	$0{,}000\,000\,001$

Exemple

- $2{,}4$ GHz $= 2{,}4 \times 10^9$ Hz (fréquence Wi-Fi).
- 5 µm $= 5 \times 10^{-6}$ m (taille d'un globule rouge).
- 500 nm $= 500 \times 10^{-9}$ m $= 5 \times 10^{-7}$ m (longueur d'onde de la lumière verte).

Ordre de grandeur

L'**ordre de grandeur** d'un nombre est la puissance de 10 la plus proche de ce nombre.

Pour le déterminer, on écrit le nombre en écriture scientifique $a \times 10^n$, puis :

- si $a < 5$, l'ordre de grandeur est 10^n ;
- si $a \geqslant 5$, l'ordre de grandeur est 10^{n+1}.

Exemple

- La distance Terre-Soleil est d'environ $1{,}5 \times 10^8$ km. Comme $1{,}5 < 5$, l'ordre de grandeur est 10^8 km.
- La population mondiale est d'environ $8{,}1 \times 10^9$ habitants. Comme $8{,}1 \geqslant 5$, l'ordre de grandeur est 10^{10} habitants.

7 - Racine carrée

Définition

Soit a un nombre positif. La **racine carrée** de a est le nombre **positif** dont le carré vaut a. On le note $\sqrt{a}$.

$$\sqrt{a} \text{ est le nombre positif tel que } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Exemple

- $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$.
- $\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$.
- $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.

Attention

La racine carrée d'un nombre **négatif** n'existe pas. Par exemple, $\sqrt{-4}$ n'a pas de sens car aucun nombre au carré ne donne un résultat négatif.

Carrés parfaits

Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier. Il est utile de connaître les carrés parfaits de 1 à 144 :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Exemple

D'après le tableau : $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{144} = 12$.

Encadrement d'une racine carrée

Lorsque a n'est pas un carré parfait, $\sqrt{a}$ n'est pas un nombre entier. On peut l'encadrer entre deux entiers consécutifs en cherchant les deux carrés parfaits qui encadrent a.

Si $n^2 \leqslant a < (n+1)^2$, alors $n \leqslant \sqrt{a} < n+1$.

Exemple

Encadrer $\sqrt{50}$ par deux entiers consécutifs.

On cherche deux carrés parfaits consécutifs qui encadrent 50 :

$49 < 50 < 64$, c'est-à-dire $7^2 < 50 < 8^2$.

D'où : $7 < \sqrt{50} < 8$.

Encadrement plus précis

On peut affiner l'encadrement de $\sqrt{50}$ à l'aide de la calculatrice :

$7{,}07^2 = 49{,}9849$ et $7{,}08^2 = 50{,}1264$

Donc $7{,}07 < \sqrt{50} < 7{,}08$.

Remarque

La racine carrée est l'opération inverse de l'élévation au carré :

- $\sqrt{a^2} = a$ pour tout nombre a positif.
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ pour tout nombre a positif.

Les questions essentielles

1. Comment calculer la puissance d'un nombre ?

On multiplie la base par elle-même autant de fois que l'indique l'exposant. Pour un exposant négatif, on calcule d'abord la puissance positive correspondante, puis on prend l'inverse. Il faut faire attention à la place des parenthèses : $(-2)^4 = 16$ mais $-2^4 = -16$.

Voir la fiche méthode : Calculer la puissance d'un nombre ↗

2. Comment appliquer les règles de calcul sur les puissances ?

On identifie d'abord si les bases sont identiques, puis on choisit la règle adaptée : produit (on additionne les exposants), quotient (on soustrait), puissance de puissance (on multiplie). Ces règles ne s'appliquent que sur des bases identiques.

Voir la fiche méthode : Appliquer les règles de calcul sur les puissances ↗

3. Comment écrire un nombre en écriture scientifique ?

On place la virgule après le premier chiffre non nul pour obtenir un nombre entre 1 et 10, on compte le nombre de positions déplacées, et on détermine le signe de l'exposant : positif si le nombre d'origine est grand ($\geqslant 10$), négatif s'il est petit (< 1).

Voir la fiche méthode : Écrire un nombre en écriture scientifique ↗

4. Comment déterminer un ordre de grandeur ?

On écrit le nombre en écriture scientifique $a \times 10^n$. Si $a < 5$, l'ordre de grandeur est 10^n ; si $a \geqslant 5$, c'est 10^{n+1}. L'ordre de grandeur permet de comparer rapidement des grandeurs très différentes.

Voir la fiche méthode : Déterminer un ordre de grandeur ↗

5. Comment utiliser la racine carrée ?

La racine carrée de a est le nombre positif dont le carré vaut a. On connaît par coeur les racines des carrés parfaits (de 1 à 144) et on encadre les autres entre deux entiers consécutifs en trouvant les deux carrés parfaits qui encadrent le nombre.

Voir la fiche méthode : Utiliser la racine carrée ↗