PROPORTIONNALITÉ ET POURCENTAGES

COURS

Proportionnalité et pourcentages

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Reconnaître une situation de proportionnalité
- Calculer une quatrième proportionnelle
- Appliquer un pourcentage
- Calculer une augmentation ou une diminution en pourcentage
- Utiliser une échelle

La proportionnalité est un outil fondamental en mathématiques et dans la vie courante. Ce chapitre présente les méthodes pour reconnaître une situation de proportionnalité, calculer avec un tableau de proportionnalité, exploiter un graphique, appliquer des pourcentages et utiliser des échelles.

1 - Reconnaître une situation de proportionnalité

Grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre constant, appelé **coefficient de proportionnalité**.
Le tableau qui relie ces deux grandeurs est alors un **tableau de proportionnalité**.

Pour vérifier qu'un tableau est un tableau de proportionnalité, on calcule le quotient de chaque valeur de la deuxième ligne par la valeur correspondante de la première ligne. Si tous les quotients sont égaux, les grandeurs sont proportionnelles.

Exemple

Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité ?

Masse (en kg)	3	5	8
Prix (en euros)	4,50	7,50	12

On calcule les quotients :
$\frac{4{,}50}{3} = 1{,}5$, $\frac{7{,}50}{5} = 1{,}5$, $\frac{12}{8} = 1{,}5$
Tous les quotients sont égaux à $1{,}5$. C'est un tableau de proportionnalité et le coefficient de proportionnalité est $1{,}5$.

Exemple

Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité ?

Côté d'un carré (en cm)	2	5	10
Aire du carré (en cm²)	4	25	100

On calcule les quotients :
$\frac{4}{2} = 2$, $\frac{25}{5} = 5$, $\frac{100}{10} = 10$
Les quotients ne sont pas égaux. Ce n'est **pas** un tableau de proportionnalité : l'aire d'un carré n'est pas proportionnelle à la longueur de son côté.

Propriétés d'un tableau de proportionnalité

Dans un tableau de proportionnalité :

- On peut **multiplier** (ou diviser) les valeurs d'une colonne par un même nombre pour obtenir une autre colonne.
- On peut **additionner** les valeurs de deux colonnes pour obtenir une troisième colonne.

2 - Calculer une quatrième proportionnelle

Lorsque trois valeurs d'un tableau de proportionnalité sont connues, on peut calculer la quatrième valeur manquante.

Produit en croix

Dans un tableau de proportionnalité :

a	c
b	x

les **produits en croix** sont égaux :

$$a \times x = b \times c$$

On en déduit :

$$x = \frac{b \times c}{a}$$

Exemple

Un volailler vend des poulets au poids. Un poulet de 1,350 kg coute 17,01 euros. Combien coute un poulet de 1,750 kg ?

Masse (en kg)	1,350	1,750
Prix (en euros)	17,01	x

Par produit en croix :

$$x = \frac{17{,}01 \times 1{,}750}{1{,}350} = \frac{29{,}7675}{1{,}350} = 22{,}05$$

Le poulet de 1,750 kg coute **22,05 euros**.

Retour à l'unité

On peut aussi calculer la quatrième proportionnelle en déterminant d'abord la valeur correspondant à une unité, puis en multipliant par la quantité souhaitée.

Exemple

5 cahiers coutent 8 euros. Combien coutent 12 cahiers ?

Retour à l'unité : le prix d'un cahier est $\frac{8}{5} = 1{,}60$ euro.

Le prix de 12 cahiers est $12 \times 1{,}60 = 19{,}20$ euros.

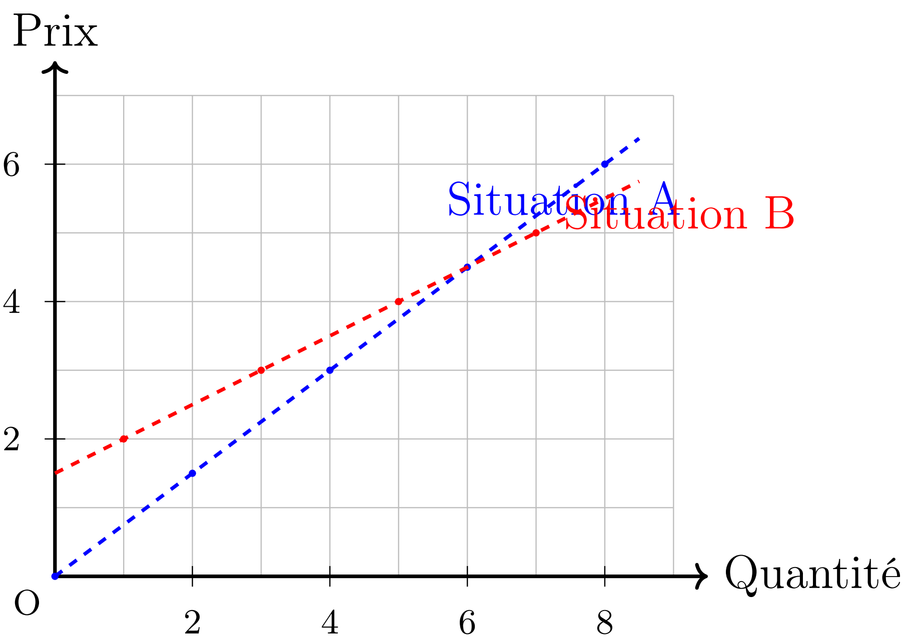
3 - Proportionnalité et représentation graphique

Caractérisation graphique

- Si deux grandeurs sont proportionnelles, alors leur représentation graphique est un ensemble de **points alignés avec l'origine** du repère.
- Réciproquement, si les points d'un graphique sont alignés avec l'origine, alors les grandeurs représentées sont proportionnelles.

Exemple

On représente dans un repère le prix en fonction de la quantité achetée, pour deux situations.



- **Situation A :** les points sont alignés et passent par l'origine O. Les grandeurs sont proportionnelles.
- **Situation B :** les points sont alignés mais la droite ne passe pas par l'origine. Les grandeurs ne sont **pas** proportionnelles.

⚠ Attention

Pour conclure à une situation de proportionnalité sur un graphique, il ne suffit pas que les points soient alignés : la droite doit aussi passer par l'**origine** du repère.

4 - Pourcentages

Pourcentage

Un **pourcentage** est une proportion exprimée par rapport à 100.
Dire que « 30 % des élèves sont externes » signifie que sur 100 élèves, 30 seraient externes.

Calculer un pourcentage d'une quantité

Prendre $t\,\%$ d'une quantité Q revient à calculer :

$$\frac{t}{100} \times Q$$

Exemple

Dans un collège de 450 élèves, 60 % sont demi-pensionnaires. Combien y a-t-il de demi-pensionnaires ?

$\dfrac{60}{100} \times 450 = 0{,}6 \times 450 = 270$

Il y a **270** élèves demi-pensionnaires.

Exprimer une proportion en pourcentage

Pour exprimer en pourcentage la part que représente une quantité P dans un total T :

$$\text{Pourcentage} = \frac{P}{T} \times 100$$

Exemple

Sur 135 élèves de 3e, 114 ont obtenu le brevet. Quel pourcentage cela représente-t-il ?
$\frac{114}{135} \times 100 \approx 84{,}4$
Environ **84,4 %** des élèves de 3e ont obtenu le brevet.

5 - Augmentations et diminutions en pourcentage

Augmenter d'un pourcentage

Augmenter une quantité de $t\,\%$ revient à la multiplier par le coefficient :

$$1 + \frac{t}{100}$$

Exemple

Un article coute 80 euros. Son prix augmente de 5 %. Calculer le nouveau prix.

Le coefficient multiplicateur est $1 + \dfrac{5}{100} = 1{,}05$.

Le nouveau prix est $80 \times 1{,}05 = 84$ euros.

Diminuer d'un pourcentage

Diminuer une quantité de $t\,\%$ revient à la multiplier par le coefficient :

$$1 - \frac{t}{100}$$

Exemple

Un pantalon à 65 euros est soldé à $-20\,\%$. Calculer le prix soldé.

Le coefficient multiplicateur est $1 - \dfrac{20}{100} = 0{,}8$.

Le prix soldé est $65 \times 0{,}8 = 52$ euros.

Attention

Deux augmentations successives de $10\,\%$ ne correspondent pas à une augmentation de $20\,\%$.

Le coefficient total est $1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21$, ce qui correspond à une augmentation de $21\,\%$.

6 - Échelles

Échelle

L'**échelle** d'un plan ou d'une carte est le quotient :

$$\frac{\text{distance sur le plan}}{\text{distance réelle}}$$

les deux distances étant exprimées dans la **même unité**.

Exemple

Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{50\,000}$, la distance entre deux villes mesure 6 cm. Calculer la distance réelle.

L'échelle $\frac{1}{50\,000}$ signifie que 1 cm sur la carte correspond à $50\,000$ cm en réalité, soit 500 m.

La distance réelle est $6 \times 500 = 3\,000$ m, soit **3 km**.

Exemple

Une maquette de la Tour Eiffel mesure 32,4 cm. La Tour Eiffel mesure 324 m de haut. Calculer l'échelle de la maquette.

On convertit dans la même unité : 324 m $= 32\,400$ cm.

$$\frac{32{,}4}{32\,400} = \frac{1}{1\,000}$$

L'échelle de la maquette est $\frac{1}{1\,000}$.

Remarque

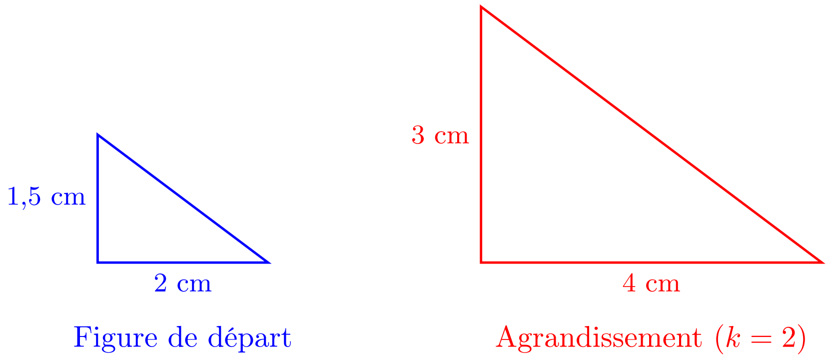
Les problèmes d'échelle sont des problèmes de proportionnalité : la distance sur le plan et la distance réelle sont deux grandeurs proportionnelles.

7 - Agrandissement et réduction

Agrandissement et réduction

Agrandir ou **réduire** une figure, c'est construire une nouvelle figure de **même forme** dont toutes les dimensions sont multipliées par un même nombre k strictement positif, appelé **coefficient** d'agrandissement ou de réduction.

- Si $k > 1$, il s'agit d'un **agrandissement**.
- Si $0 < k < 1$, il s'agit d'une **réduction**.



Effet du coefficient sur les longueurs, les aires et les volumes

Dans un agrandissement ou une réduction de coefficient k :

- chaque **longueur** est multipliée par k ;
- chaque **aire** est multipliée par k^2 ;
- chaque **volume** est multiplié par k^3.

Les **angles**, eux, sont conservés : la figure garde la même forme.

Exemple

On agrandit un triangle d'aire 6 cm² avec un coefficient $k = 3$.

Longueurs : elles sont multipliées par 3.

Aire : elle est multipliée par $k^2 = 3^2 = 9$, soit $6 \times 9 = 54$ cm².

Exemple

Un segment de 12 cm est transformé en un segment de 3 cm. S'agit-il d'un agrandissement ou d'une réduction ?
Le coefficient est le quotient de la longueur d'arrivée par la longueur de départ :
$k = \dfrac{3}{12} = 0{,}25.$
Comme $0 < 0{,}25 < 1$, il s'agit d'une **réduction**.

Remarque

Un agrandissement ou une réduction est une situation de proportionnalité : les longueurs de la figure obtenue sont proportionnelles à celles de la figure de départ, et le coefficient de proportionnalité est exactement le coefficient k. C'est la même idée que dans une configuration du théorème de Thalès.

Les questions essentielles

1. Comment vérifier si un tableau est un tableau de proportionnalité ?

On calcule le quotient de chaque valeur de la deuxième ligne par la valeur correspondante de la première ligne. Si tous les quotients sont égaux, c'est un tableau de proportionnalité.

Voir la fiche méthode : Reconnaître une situation de proportionnalité

2. Comment calculer une quatrième proportionnelle ?

On utilise le produit en croix ou le retour à l'unité. Par produit en croix : on écrit l'égalité des produits en croix puis on isole l'inconnue.

Voir la fiche méthode : Calculer une quatrième proportionnelle

3. Comment reconnaître une proportionnalité sur un graphique ?

Si les points du graphique sont alignés et que la droite passe par l'origine du repère, alors les grandeurs sont proportionnelles. Si la droite ne passe pas par l'origine, ce n'est pas de la proportionnalité.

Voir la fiche méthode : Reconnaître une situation de proportionnalité

4. Comment calculer un pourcentage d'une quantité ?

Prendre $t\,\%$ d'une quantité Q revient à multiplier Q par $\frac{t}{100}$. Par exemple, $30\,\%$ de 200 donne $\frac{30}{100} \times 200 = 60$.

Voir la fiche méthode : Appliquer un pourcentage

5. Comment appliquer une augmentation ou une diminution en pourcentage ?

On multiplie par le coefficient multiplicateur : $1 + \frac{t}{100}$ pour une augmentation de $t\,\%$, ou $1 - \frac{t}{100}$ pour une diminution de $t\,\%$.

Voir la fiche méthode : Calculer une augmentation ou une diminution en pourcentage

6. Comment utiliser une échelle ?

L'échelle est le quotient distance sur le plan / distance réelle, les deux distances étant dans la même unité. On utilise un tableau de proportionnalité pour convertir entre distances sur le plan et distances réelles.

Voir la fiche méthode : Utiliser une échelle

7. Quel est l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur une figure ?

Dans un agrandissement ou une réduction de coefficient k, les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3. Les angles sont conservés.

Voir la fiche méthode : Agrandir ou réduire une figure

Télécharger en PDF