PROBABILITÉS

COURS

Probabilités

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Déterminer les issues d'une expérience aléatoire
- Calculer la probabilité d'un événement
- Utiliser l'événement contraire
- Exprimer une probabilité sous différentes formes

1. Expérience aléatoire et probabilité

Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance, mais dont on peut lister toutes les possibilités.
Chacun des résultats possibles s'appelle une **issue**.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré à six faces et on regarde le numéro inscrit sur la face du dessus. C'est une expérience aléatoire.
Les issues sont : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Exemple

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde la face obtenue.
Les issues sont : Pile et Face.

Probabilité d'une issue

La **probabilité** d'une issue est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance que cette issue se produise.

- Une probabilité proche de 0 signifie que l'issue a très peu de chances de se produire.
- Une probabilité proche de 1 signifie que l'issue a de grandes chances de se produire.

Remarque

On peut exprimer une probabilité de trois façons différentes :

- Sous forme de **fraction** : $\frac{1}{4}$

- Sous forme de **nombre décimal** : $0{,}25$
- Sous forme de **pourcentage** : 25%

Ces trois écritures représentent la même probabilité.

Exemple

On lance une pièce de monnaie équilibrée. La probabilité d'obtenir « Face » vaut $\frac{1}{2}$, soit $0{,}5$, soit 50%.
On peut dire que l'on a « une chance sur deux » d'obtenir « Face ».

Propriété

La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Exemple

On lance un dé truqué à six faces. Les probabilités de chaque issue sont données dans le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,3	0,1	0,2	0,1	0,05	0,25

On vérifie : $0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}25 = 1$.

La somme des probabilités est bien égale à 1.

Équiprobabilité

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la **même probabilité**, on dit que les issues sont **équiprobables**.

Si l'expérience comporte n issues équiprobables, la probabilité de chacune d'elles vaut :

$$\frac{1}{n}$$

Exemple

On lance un dé cubique **équilibré** à six faces. Les 6 issues sont équiprobables.

La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{6}$.

En particulier, la probabilité d'obtenir le 4 est $\frac{1}{6}$.

Stabilisation des fréquences

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la probabilité de cette issue.

Exemple

On lance une pièce de monnaie équilibrée un grand nombre de fois et on note la fréquence de « Face ». Après 10 lancers, la fréquence peut valoir 0,3 ou 0,7. Mais après 1 000 lancers, la fréquence se stabilise autour de 0,5, qui est la probabilité d'obtenir « Face ».

2. Probabilité d'un événement

Événement

Un **événement** est un résultat ou un ensemble de résultats d'une expérience aléatoire.
Selon le résultat de l'expérience, on dit qu'un événement est **réalisé** ou **non réalisé**.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré à six faces. On considère l'événement A : « Obtenir un nombre pair ».
L'événement A est réalisé si on obtient 2, 4 ou 6.
L'événement A n'est pas réalisé si on obtient 1, 3 ou 5.

Probabilité d'un événement

La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Propriété

La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.

Probabilité en situation d'équiprobabilité

Dans une expérience aléatoire où toutes les issues sont équiprobables, la probabilité d'un événement A vaut :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple

On lance un dé cubique équilibré à six faces. Les 6 issues sont équiprobables.
On considère l'événement A : « Obtenir un nombre pair ».
Les issues qui réalisent A sont : 2, 4 et 6. Il y en a 3.
$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
La probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{1}{2}$, soit $0{,}5$ ou 50%.

Exemple

On choisit au hasard un élève dans une classe de 4e comptant 30 élèves dont 8 portent des lunettes.
On considère l'événement B : « L'élève choisi porte des lunettes ».

$$P(B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

La probabilité que l'élève choisi porte des lunettes est $\frac{4}{15}$.

Événement impossible et événement certain

- Un **événement impossible** est un événement qui ne peut jamais se réaliser. Sa probabilité est égale à 0.
- Un **événement certain** est un événement qui se réalise toujours, quel que soit le résultat de l'expérience. Sa probabilité est égale à 1.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré à six faces.

- L'événement « Obtenir 7 » est impossible : sa probabilité est 0.
- L'événement « Obtenir un nombre entre 1 et 6 » est certain : sa probabilité est 1.

3. Événements incompatibles et contraires

Événements incompatibles

Deux événements sont **incompatibles** lorsqu'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré à six faces.

- Les événements « Obtenir un numéro strictement inférieur à 3 » et « Obtenir un numéro strictement supérieur à 4 » sont incompatibles : aucun numéro ne peut être à la fois inférieur à 3 et supérieur à 4.
- Les événements « Obtenir un nombre pair » et « Obtenir un multiple de 3 » ne sont pas incompatibles : le numéro 6 réalise les deux événements.

Probabilité de l'un ou l'autre

Si deux événements A et B sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est :

$$P(\text{A ou B}) = P(A) + P(B)$$

Exemple

On tire une boule au hasard dans un sac contenant 20 boules numérotées de 1 à 20.
On considère les événements :
A : « Obtenir un multiple de 10 » et B : « Obtenir un numéro strictement inférieur à 4 ».

Les multiples de 10 entre 1 et 20 sont : 10 et 20. Donc $P(A) = \frac{2}{20}$.

Les numéros strictement inférieurs à 4 sont : 1, 2 et 3. Donc $P(B) = \frac{3}{20}$.

Les événements A et B sont incompatibles (aucun numéro n'est à la fois un multiple de 10 et strictement inférieur à 4).

Donc : $P(\text{A ou B}) = \frac{2}{20} + \frac{3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Événement contraire

L'**événement contraire** d'un événement A est l'événement qui est réalisé lorsque A n'est pas réalisé, et inversement. On le note $\overline{A}$.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré à six faces.
Si A est l'événement « Obtenir un nombre pair », alors $\overline{A}$ est l'événement « Obtenir un nombre impair ».
Si B est l'événement « Obtenir un 6 », alors $\overline{B}$ est l'événement « Obtenir un numéro différent de 6 », c'est-à-dire obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5.

Probabilité de l'événement contraire

La somme des probabilités d'un événement et de son événement contraire est égale à 1 :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

On peut donc calculer la probabilité de l'événement contraire :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Exemple

Au grenier, un carton contient 3 boules rouges, 2 vertes et 4 bleues. On tire une boule au hasard.
On considère l'événement A : « Obtenir une boule bleue ».
Il y a $3 + 2 + 4 = 9$ boules au total et 4 boules bleues.
$P(A) = \frac{4}{9}$
L'événement contraire $\overline{A}$ est « Ne pas obtenir une boule bleue » (c'est-à-dire obtenir une boule rouge ou verte).
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$
La probabilité de ne pas obtenir une boule bleue est $\frac{5}{9}$.

Attention

- Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1. Si un calcul donne un résultat négatif ou supérieur à 1, c'est qu'il y a une erreur.

- En situation d'équiprobabilité, ne pas confondre le nombre d'issues favorables et le nombre total d'issues. Le nombre d'issues favorables est toujours au **numérateur** de la fraction.
- Pour utiliser la formule $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$, il faut que les issues soient **équiprobables**. Cette formule ne s'applique pas avec un dé truqué, par exemple.

Les questions essentielles

1. Comment déterminer les issues d'une expérience aléatoire ?

Il faut lister tous les résultats possibles de l'expérience. Par exemple, pour un dé à six faces, les issues sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Voir la fiche méthode : Déterminer les issues d'une expérience aléatoire

2. Comment calculer la probabilité d'un événement ?

En situation d'équiprobabilité, on divise le nombre d'issues qui réalisent l'événement par le nombre total d'issues.

Voir la fiche méthode : Calculer la probabilité d'un événement

3. Comment utiliser l'événement contraire ?

On utilise la formule $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. C'est particulièrement utile quand le comptage direct des issues favorables est plus difficile que celui de l'événement contraire.

Voir la fiche méthode : Utiliser l'événement contraire

4. Comment exprimer une probabilité sous différentes formes ?

Une probabilité peut s'exprimer en fraction, en nombre décimal ou en pourcentage. On passe de la fraction au décimal par division, et du décimal au pourcentage en multipliant par 100.

Voir la fiche méthode : Exprimer une probabilité sous différentes formes

Télécharger en PDF