Notion de fonction

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

En mathématiques, de nombreuses situations font intervenir deux grandeurs liées : le côté d'un carré et son aire, la durée d'un trajet et la distance parcourue, la température au fil de la journée. La notion de fonction permet de décrire ces dépendances de manière précise.

1 - Notion de fonction

Fonction

Une **fonction** est un procédé qui, à chaque nombre, associe **un unique** nombre.
On désigne une fonction par une lettre, souvent f, g ou h.

- Le nombre de départ s'appelle la **variable**, souvent noté x.
- Le nombre obtenu s'appelle l'**image** de x par la fonction f, noté $f(x)$ (lire « f de x »).

On note $f : x \longmapsto f(x)$, qui se lit « la fonction f qui à x associe $f(x)$ ».

Exemple

La formule $f(x) = 2x + 3$ définit une fonction f.

Pour $x = 4 : f(4) = 2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$.

L'image de 4 par la fonction f est 11.

Produire une formule

Le côté d'un carré mesure x cm. Exprimer son aire en fonction de x.

L'aire d'un carré est le produit du côté par lui-même :

$f(x) = x^2$

Pour un carré de côté 3 cm : $f(3) = 3^2 = 9$. L'aire vaut 9 cm^2.

ⓘ **Remarque**

Une fonction peut être définie de plusieurs façons :

- par une **formule** : $f(x) = 3x - 1$
- par un **tableau de valeurs**
- par un **graphique** (une courbe dans un repère)
- par une **phrase** : « à chaque élève, on associe sa taille en cm »

2 - Image et antécédent

Image

Soit f une fonction et a un nombre.

Le nombre $f(a)$ s'appelle l'**image** de a par la fonction f.

On dit que « a a pour image $f(a)$ par f ».

Antécédent

Si $f(a) = b$, on dit que a est un **antécédent** de b par la fonction f.

Chercher un antécédent de b, c'est trouver un nombre a tel que $f(a) = b$.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x - 5$.

Calcul d'une image :

$f(4) = 3 \times 4 - 5 = 12 - 5 = 7$

L'image de 4 par f est 7.

Recherche d'un antécédent :

On cherche x tel que $f(x) = 1$, c'est-à-dire $3x - 5 = 1$.

$3x = 6$

$x = 2$

L'antécédent de 1 par f est 2.

Exemple

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2$.

On cherche les antécédents de 9 par g, c'est-à-dire les nombres x tels que $x^2 = 9$.

Comme $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$, les antécédents de 9 par g sont 3 et -3.

On cherche les antécédents de -4 par g, c'est-à-dire les nombres x tels que $x^2 = -4$.

Un carré est toujours positif ou nul, donc $x^2 = -4$ n'a pas de solution : le nombre -4 n'a **aucun antécédent** par g.

Attention

- L'image d'un nombre par une fonction est toujours **unique** : un nombre a une seule image.
- Un nombre peut avoir **plusieurs antécédents**, **un seul** antécédent, ou **aucun** antécédent.

3 - Tableau de valeurs

Tableau de valeurs

Un **tableau de valeurs** d'une fonction f est un tableau dans lequel :

- la première ligne contient des valeurs choisies de la variable x
- la deuxième ligne contient les images correspondantes $f(x)$

Exemple

Compléter le tableau de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$.

On remplace x par chaque valeur :

$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(0) = 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

$f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	0	-1	0	3

Remarque

Dans le tableau ci-dessus, $f(-2) = f(2) = 3$ et $f(-1) = f(1) = 0$. Un même nombre peut apparaitre plusieurs fois dans la ligne des images : les nombres 3 et 0 ont chacun deux antécédents par f.

4 - Représentation graphique d'une fonction

Courbe représentative

La **courbe représentative** (ou **représentation graphique**) d'une fonction f dans un repère est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.

Propriété

Un point $M(a\,;\,b)$ appartient à la courbe représentative de f si et seulement si $b = f(a)$.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$.

Le point $A(3\,;\,10)$ appartient-il à la courbe de f ?

On calcule $f(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$.

Comme $f(3) = 10$, le point $A(3\,;\,10)$ **appartient** à la courbe de f.

Le point $B(2\,;\,6)$ appartient-il à la courbe de f ?

On calcule $f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$.

Comme $f(2) = 5 \neq 6$, le point $B(2\,;\,6)$ **n'appartient pas** à la courbe de f.

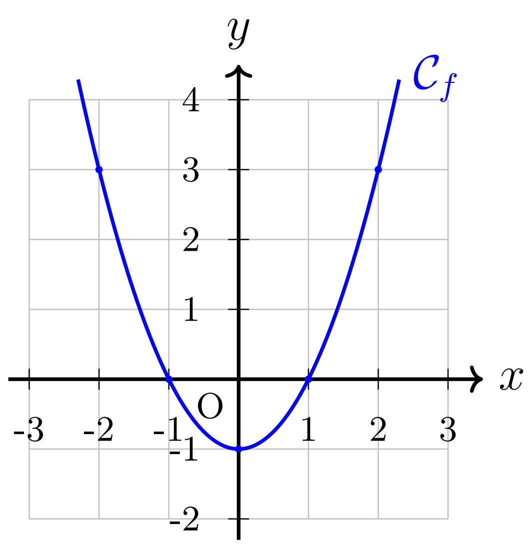
Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, on construit un tableau de valeurs, on place les points correspondants dans un repère, puis on les relie par une courbe lisse.

Tracer une courbe

On reprend la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$. On utilise le tableau de valeurs complété plus haut.

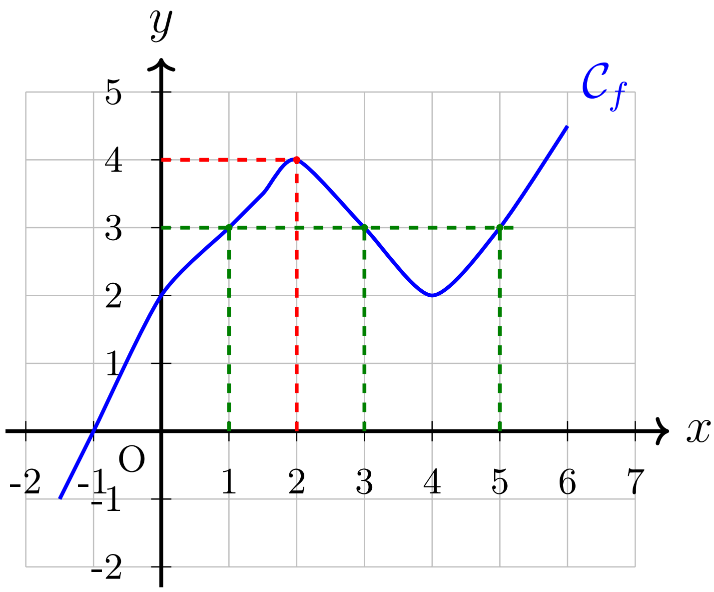
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	0	-1	0	3

On place les points dans un repère, puis on les relie par une courbe lisse.



5 - Lire image et antécédent sur un graphique

On considère la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f tracée dans un repère.



Pour lire l'image d'un nombre (tracé en rouge) :

1. Repérer la valeur de x sur l'axe des abscisses.
2. Tracer une droite verticale jusqu'à la courbe.
3. Depuis le point d'intersection, tracer une droite horizontale jusqu'à l'axe des ordonnées.
4. Lire la valeur obtenue : c'est $f(x)$.

Lire une image

Sur le graphique ci-dessus, on lit l'image de 2 par f (tracé en rouge).

On part de $x = 2$ sur l'axe des abscisses, on monte verticalement jusqu'à la courbe, puis on va horizontalement jusqu'à l'axe des ordonnées. On lit

$f(2) = 4$.

L'image de 2 par f est 4.

Pour lire les antécédents d'un nombre (tracé en vert) :

1. Repérer la valeur sur l'axe des ordonnées.
2. Tracer une droite horizontale.
3. Repérer tous les points d'intersection avec la courbe.
4. Depuis chaque point, tracer une droite verticale jusqu'à l'axe des abscisses.
5. Lire les valeurs obtenues : ce sont les antécédents.

Lire des antécédents

Sur le graphique ci-dessus, on cherche les antécédents de 3 par f (tracé en vert).
On trace la droite horizontale $y = 3$. Elle coupe la courbe en trois points, d'abscisses 1, 3 et 5.
Les antécédents de 3 par f sont 1, 3 et 5 : on a $f(1) = 3$, $f(3) = 3$ et $f(5) = 3$.

Remarque

Sur un graphique, un nombre peut avoir :

- **un seul** antécédent (la droite horizontale coupe la courbe en un seul point)

- **plusieurs** antécédents (la droite horizontale coupe la courbe en plusieurs points)
- **aucun** antécédent (la droite horizontale ne coupe pas la courbe)

⚠ Attention

Ne pas confondre image et antécédent : l'image se lit sur l'axe des **ordonnées** (vertical), l'antécédent se lit sur l'axe des **abscisses** (horizontal).

Les questions essentielles

1. Comment calculer l'image d'un nombre par une fonction ?

On remplace la variable x par le nombre donné dans l'expression de $f(x)$, puis on effectue le calcul en respectant les priorités opératoires.

Voir la fiche méthode : Calculer l'image d'un nombre par une fonction ↗

2. Comment déterminer un antécédent par le calcul ?

On écrit l'équation $f(x) = b$ en remplaçant $f(x)$ par son expression, puis on résout cette équation pour trouver la valeur de x. On vérifie en recalculant l'image.

Voir la fiche méthode : Déterminer un antécédent par le calcul ↗

3. Comment lire l'image d'un nombre sur un graphique ?

On repère x sur l'axe des abscisses, on trace une droite verticale jusqu'à la courbe, puis une droite horizontale jusqu'à l'axe des ordonnées. La valeur lue est l'image.

Voir la fiche méthode : Lire l'image d'un nombre sur un graphique ↗

4. Comment lire les antécédents d'un nombre sur un graphique ?

On repère la valeur sur l'axe des ordonnées, on trace une droite horizontale et on repère tous les points d'intersection avec la courbe. Les abscisses de ces points sont les antécédents.

Voir la fiche méthode : Lire les antécédents d'un nombre sur un graphique ↗

5. Comment tracer la courbe représentative d'une fonction ?

On construit un tableau de valeurs en calculant les images pour plusieurs valeurs de x, on place les points correspondants dans un repère, puis on les relie par une courbe lisse.

Voir la fiche méthode : Représenter graphiquement une fonction ↗