Nombres relatifs et fractions

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

1 - Rappels sur les nombres relatifs

Définition

Un **nombre relatif** est un nombre positif ou négatif. Il est formé :

- d'un **signe** ($+$ ou $-$),
- d'une **partie numérique** appelée **distance à zéro**.

Deux nombres relatifs qui ont la même distance à zéro mais des signes contraires sont dits **opposés**. L'opposé de a est noté $-a$.

Exemple

L'opposé de 7 est -7. L'opposé de $-3{,}5$ est $3{,}5$.

La distance à zéro de -12 est 12.

Additionner et soustraire des relatifs

Pour additionner deux nombres relatifs :

- **de même signe** : on additionne leurs distances à zéro et on conserve le signe commun.
- **de signes contraires** : on soustrait la plus petite distance à zéro de la plus grande, et on prend le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.

Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé :

$$a - b = a + (-b)$$

Exemple

- $(-8) + (-5) = -13$ (même signe : on ajoute 8 et 5, on garde le $-$).
- $(-8) + 5 = -3$ (signes contraires : $8 - 5 = 3$, on garde le signe du -8).
- $7 - (-4) = 7 + 4 = 11$ (soustraire -4 revient à ajouter 4).
- $-2 - 9 = -2 + (-9) = -11$.

2 - Multiplier et diviser des nombres relatifs

Règle des signes

Le produit ou le quotient de deux nombres relatifs obéit à la **règle des signes** :

- le produit (ou le quotient) de deux nombres de **même signe** est **positif**.
- le produit (ou le quotient) de deux nombres de **signes contraires** est **négatif**.

On calcule ensuite le produit (ou le quotient) des distances à zéro.

Exemple

- $(-6) \times (-4) = +24$ (signes identiques).
- $(-7) \times 3 = -21$ (signes contraires).
- $\dfrac{-15}{-3} = +5$ (signes identiques).
- $\dfrac{20}{-4} = -5$ (signes contraires).

Signe d'un produit de plusieurs facteurs

Dans un produit de plusieurs nombres relatifs non nuls :

- si le nombre de facteurs négatifs est **pair**, le produit est **positif**.
- si le nombre de facteurs négatifs est **impair**, le produit est **négatif**.

Exemple

Calculer $A = (-2) \times (-3) \times (-5) \times 4$.

Il y a 3 facteurs négatifs : le produit est donc négatif.

On multiplie les distances à zéro : $2 \times 3 \times 5 \times 4 = 120$.

D'où $A = -120$.

Attention

Attention à bien distinguer -3^2 et $(-3)^2$:

- $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$: le carré porte sur le nombre relatif -3.
- $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$: le carré porte uniquement sur 3, puis on applique le signe $-$.

3 - Nombres rationnels et fractions

Définition

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, où a est un entier relatif et b un entier relatif non nul.

Exemple

$\frac{3}{5}$, $\frac{-7}{4}$, $\frac{12}{-9}$ et $4 = \frac{4}{1}$ sont des nombres rationnels.

Égalité et simplification

Pour tout nombre k non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Multiplier (ou diviser) le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul ne change pas la valeur de la fraction.

De plus, le signe d'une fraction peut se placer indifféremment devant la fraction, au numérateur ou au dénominateur :

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Exemple

Simplifier $F = \dfrac{-18}{24}$.

18 et 24 sont tous les deux divisibles par 6 :

$$F = \frac{-18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{-3}{4}$$

On peut également écrire $F = -\dfrac{3}{4}$.

Remarque

Par convention, on écrit une fraction avec un **dénominateur positif**. Ainsi, $\dfrac{5}{-7}$ s'écrit plutôt $\dfrac{-5}{7}$ ou $-\dfrac{5}{7}$.

4 - Additionner et soustraire des fractions

Addition et soustraction

Pour additionner ou soustraire deux fractions :

1. on les écrit avec un même dénominateur (un **multiple commun** des dénominateurs) ;
2. on additionne ou on soustrait les numérateurs, en conservant le dénominateur commun ;
3. on simplifie si possible.

Les règles de signes sur les relatifs s'appliquent alors aux numérateurs.

Dénominateur multiple de l'autre

Calculer $A = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$.

6 est un multiple de 3, on prend 6 comme dénominateur commun. On écrit $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$.

$$A = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dénominateurs sans lien direct

Calculer $B = \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$.

Aucun des deux dénominateurs n'est multiple de l'autre. On choisit comme dénominateur commun leur produit $4 \times 5 = 20$.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$$

$$B = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{15+8}{20} = \frac{23}{20}$$

Avec une fraction négative

Calculer $C = \frac{-7}{12} + \frac{1}{4}$.

12 est un multiple de 4, on prend 12 comme dénominateur commun. On écrit $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$.

$$C = \frac{-7}{12} + \frac{3}{12} = \frac{-7+3}{12} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$$

5 - Multiplier et diviser des fractions

Produit de deux fractions

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

On simplifie avant de multiplier lorsque c'est possible. La règle des signes s'applique comme pour les relatifs.

Exemple

Calculer $D = \frac{-3}{8} \times \frac{4}{9}$.

Le produit est négatif (signes contraires). Avant de multiplier, on simplifie : 3 et 9 sont divisibles par 3 ; 4 et 8 par 4.

$$D = \frac{-3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{-1}{6}$$

Inverse d'un nombre

L'**inverse** d'un nombre non nul a est le nombre qui, multiplié par a, donne 1. On le note $\frac{1}{a}$.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ (avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$) est $\frac{b}{a}$: on échange numérateur et dénominateur.

Exemple

- L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$.
- L'inverse de $\frac{3}{7}$ est $\frac{7}{3}$.
- L'inverse de $-\frac{2}{9}$ est $-\frac{9}{2}$ (l'inverse garde le même signe).

Attention

Le nombre 0 n'a pas d'inverse : on ne peut jamais diviser par zéro.

Il ne faut pas confondre **opposé** et **inverse** : l'opposé de 5 est -5, son inverse est $\frac{1}{5}$.

Division d'une fraction

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemple

Calculer $E = \dfrac{5}{6} \div \dfrac{-10}{3}$.

On remplace la division par une multiplication par l'inverse :

$$E = \frac{5}{6} \times \frac{3}{-10} = \frac{5}{6} \times \frac{-3}{10}$$

Le produit est négatif. On simplifie : 5 et 10 par 5 ; 3 et 6 par 3.

$$E = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} = \frac{-1}{4}$$

6 - Priorités opératoires et calculs en chaîne

Priorités de calcul

Dans une expression numérique contenant plusieurs opérations :

1. on effectue d'abord les calculs entre **parenthèses**, en commençant par les plus intérieures ;
2. puis les **puissances** ;
3. puis les **multiplications** et les **divisions**, de gauche à droite ;
4. enfin les **additions** et les **soustractions**, de gauche à droite.

Une barre de fraction joue le rôle de parenthèses : on calcule séparément le numérateur et le dénominateur avant d'effectuer la division.

Exemple

Calculer $F = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{-8}{5}$.

La multiplication est prioritaire sur la soustraction. On commence par elle :

$$\frac{1}{4} \times \frac{-8}{5} = \frac{1}{1} \times \frac{-2}{5} = \frac{-2}{5}$$

On poursuit avec la soustraction. Dénominateur commun de 3 et 5 : 15.

$$F = \frac{2}{3} - \frac{-2}{5} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{10}{15} + \frac{6}{15} = \frac{16}{15}$$

Avec une barre de fraction

Calculer $G = \dfrac{5-(-3)}{-2+6}$.

La barre de fraction impose de calculer séparément le numérateur et le dénominateur :

$$\text{Numérateur : } 5-(-3) = 5+3 = 8$$

$$\text{Dénominateur : } -2+6 = 4$$

D'où : $G = \dfrac{8}{4} = 2$

Attention

Deux erreurs classiques à éviter :

- **Simplifier dans une somme** : dans $\dfrac{3+6}{6}$, on **ne peut pas** simplifier le 6 du numérateur avec celui du dénominateur, car le numérateur est une somme. Le calcul correct est $\dfrac{3+6}{6} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$.
- **Oublier un signe** lors de la mise au même dénominateur : quand on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction négative, le signe s'applique à **tout** le numérateur. Par exemple $\dfrac{-3}{4} = \dfrac{-3 \times 5}{4 \times 5} = \dfrac{-15}{20}$ (et non $\dfrac{-3 \times 5}{20} = \dfrac{15}{20}$).

Les questions essentielles

1. Comment appliquer la règle des signes dans un produit ou un quotient ?

On compte le nombre de facteurs négatifs : un nombre pair donne un résultat positif, un nombre impair un résultat négatif. On calcule ensuite le produit (ou le quotient) des distances à zéro et on place le signe devant.

Voir la fiche méthode : Appliquer la règle des signes (produit et quotient) ↗

2. Comment additionner ou soustraire des fractions ?

On met les fractions au même dénominateur en choisissant un multiple commun des deux dénominateurs, puis on additionne (ou soustrait) les numérateurs en appliquant la règle des signes. On simplifie ensuite si possible.

Voir la fiche méthode : Additionner et soustraire des fractions (avec relatifs) ↗

3. Comment multiplier ou diviser des fractions ?

Pour un produit, on applique la règle des signes, on simplifie avant de multiplier (simplification croisée), puis on multiplie numérateurs et dénominateurs entre eux. Pour une division, on remplace la division par une multiplication par l'inverse de la deuxième fraction.

Voir la fiche méthode : Multiplier et diviser des fractions (avec relatifs) ↗

4. Comment calculer l'inverse d'un nombre ?

L'inverse d'une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $a \neq 0$) est $\frac{b}{a}$: on échange numérateur et dénominateur en conservant le signe. L'inverse garde le signe du nombre de départ, et 0 n'a pas d'inverse.

Voir la fiche méthode : Calculer l'inverse d'un nombre ↗

5. Comment calculer une expression mêlant fractions et relatifs ?

On identifie d'abord l'opération la moins prioritaire, on applique les priorités de calcul (parenthèses, puissances, × et ÷, + et −), et on traite une barre de fraction comme une grande parenthèse autour du numérateur et du dénominateur.

Voir la fiche méthode : Effectuer un enchaînement de calculs avec relatifs et fractions ↗