DIVISIBILITÉ ET NOMBRES PREMIERS

COURS

Divisibilité et nombres premiers

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Reconnaître si un nombre est premier
- Décomposer un entier en produit de facteurs premiers
- Rendre une fraction irréductible
- Reconnaître si deux fractions sont égales

1 - Diviseurs et multiples

Définition

Soient a et b deux entiers naturels (avec $a \neq 0$).

On dit que a est un **diviseur** de b (ou que b est un **multiple** de a, ou encore que b est **divisible** par a) s'il existe un entier naturel k tel que :

$$b = a \times k$$

Exemple

- $42 = 6 \times 7$, donc 6 est un diviseur de 42 et 42 est un multiple de 6.
- 15 est divisible par 5 car $15 = 5 \times 3$.
- 23 n'est pas divisible par 4 car il n'existe aucun entier k tel que $23 = 4 \times k$.

Remarque

Tout entier naturel n admet toujours 1 et lui-même parmi ses diviseurs : $n = 1 \times n$.

2 - Critères de divisibilité

Critères de divisibilité

- **Par 2** : un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 (nombre pair).
- **Par 3** : un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- **Par 5** : un entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- **Par 9** : un entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- **Par 10** : un entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

Exemple

Le nombre $2\,754$ est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 5 ? par 9 ?

- **Par 2** : oui, car le chiffre des unités est 4 (pair).
- **Par 3** : oui, car $2+7+5+4=18$ et 18 est divisible par 3.
- **Par 5** : non, car le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5.
- **Par 9** : oui, car $2+7+5+4=18$ et 18 est divisible par 9.

3 - Nombres premiers

Définition

Un **nombre premier** est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque

- 0 n'est pas premier : il est divisible par tous les entiers.
- 1 n'est pas premier : il n'a qu'un seul diviseur (lui-même).
- 2 est le seul nombre premier pair.

Exemple

- 7 est premier : ses seuls diviseurs sont 1 et 7.
- 12 n'est pas premier : il admet 1, 2, 3, 4, 6 et 12 comme diviseurs.
- 2, 3, 5, 7, 11, 13 sont les nombres premiers inférieurs à 15.

Test de primalité

Pour vérifier qu'un entier n (supérieur ou égal à 2) est premier, il suffit de vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Exemple

53 est-il premier ?
On a $\sqrt{53} \approx 7{,}3$. Il suffit de tester les nombres premiers inférieurs ou égaux à 7 : 2, 3, 5 et 7.

- 53 est impair, donc non divisible par 2.
- $5 + 3 = 8$, non divisible par 3.
- Le chiffre des unités est 3, donc non divisible par 5.
- $53 = 7 \times 7 + 4$, donc non divisible par 7.

Aucun de ces nombres premiers ne divise 53, donc 53 est premier.

4 - Le crible d'Ératosthène

Le crible d'Ératosthène

Le **crible d'Ératosthène** permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un entier donné. On procède ainsi :

1. Écrire tous les entiers de 2 jusqu'à la limite choisie.
2. Entourer le premier nombre non barré (2) : c'est un nombre premier.

   Barrer tous ses multiples $(4, 6, 8, ...)$.
3. Entourer le prochain nombre non barré (3) : c'est un nombre premier.

   Barrer tous ses multiples $(6, 9, 12, ...)$.
4. Répéter : entourer le prochain nombre non barré et barrer ses multiples.
5. Continuer jusqu'à ce que le carré du prochain nombre premier dépasse la limite.

Les nombres entourés (non barrés) sont les nombres premiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les 25 nombres premiers inférieurs à 100 (surlignés en vert) après application du crible.

Les 25 nombres premiers inférieurs à 100

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,$$
$$53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

5 - Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de nombres premiers.

Exemple

- $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
- $45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$
- $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$
- $17 = 17$ (17 est lui-même premier)

Décomposer un entier en facteurs premiers

Pour décomposer un entier en produit de facteurs premiers :

1. Diviser le nombre par le plus petit nombre premier possible (en commençant par 2, puis 3, 5, 7, ...).
2. Diviser le quotient obtenu par le plus petit nombre premier possible.
3. Répéter jusqu'à obtenir le quotient 1.
4. Écrire le produit de tous les facteurs premiers utilisés, en regroupant les facteurs identiques sous forme de puissances.

Décomposition de 360

On divise successivement par les nombres premiers :

$360 = 2 \times 180$

$180 = 2 \times 90$

$90 = 2 \times 45$

$45 = 3 \times 15$

$15 = 3 \times 5$

$5 = 5 \times 1$

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

6 - Applications aux fractions

Fraction irréductible

Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Exemple

- $\frac{3}{7}$ est irréductible : 3 et 7 n'ont pas de diviseur commun autre que 1.
- $\frac{12}{18}$ n'est pas irréductible : 12 et 18 sont tous les deux divisibles par 6.

Simplifier grâce à la décomposition

Pour rendre une fraction irréductible, on décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers, puis on simplifie les facteurs communs.

Simplification de 84/126

Décomposons 84 et 126 :

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$

$126 = 2 \times 3^2 \times 7$

On simplifie les facteurs communs (2, 3 et 7) :

$$\frac{84}{126} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7} = \frac{2}{3}$$

Reconnaître des fractions égales

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont **égales** si et seulement si $a \times d = b \times c$ (produits en croix).
On peut aussi vérifier que les deux fractions ont la même forme irréductible.

Exemple

Les fractions $\frac{15}{35}$ et $\frac{21}{49}$ sont-elles égales ?

Méthode 1 (produits en croix) : $15 \times 49 = 735$ et $35 \times 21 = 735$. Les produits en croix sont égaux, donc les fractions sont égales.

Méthode 2 (forme irréductible) :
$\frac{15}{35} = \frac{3 \times 5}{5 \times 7} = \frac{3}{7}$ et $\frac{21}{49} = \frac{3 \times 7}{7 \times 7} = \frac{3}{7}$

Les deux fractions ont la même forme irréductible $\frac{3}{7}$, donc elles sont égales.

⚠ Attention

Pour simplifier une fraction, on ne peut diviser le numérateur et le dénominateur que par un **même diviseur commun**. La décomposition en facteurs premiers garantit de trouver tous les diviseurs communs et d'obtenir la fraction irréductible.

Les questions essentielles

1. Comment savoir si un nombre est premier ?

On teste s'il est divisible par les nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée (2, 3, 5, 7...). Si aucun ne le divise, il est premier. Les critères de divisibilité permettent de tester rapidement 2, 3 et 5.
Voir la fiche méthode : Reconnaître si un nombre est premier

2. Comment décomposer un nombre en produit de facteurs premiers ?

On divise le nombre par le plus petit nombre premier possible, on répète avec le quotient obtenu jusqu'à arriver à 1, puis on écrit le produit de tous les facteurs premiers utilisés (avec les exposants).
Voir la fiche méthode : Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

3. Comment simplifier une fraction pour la rendre irréductible ?

On décompose le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers, puis on simplifie les facteurs qui apparaissent à la fois en haut et en bas. La fraction obtenue est irréductible.
Voir la fiche méthode : Rendre une fraction irréductible

4. Comment vérifier si deux fractions sont égales ?

Deux méthodes : soit on calcule les produits en croix (s'ils sont égaux, les fractions sont égales), soit on simplifie chaque fraction jusqu'à sa forme irréductible et on compare.

Voir la fiche méthode : Reconnaître si deux fractions sont égales

5. À quoi sert la décomposition en facteurs premiers ?

Elle permet de voir clairement tous les diviseurs d'un nombre. On l'utilise notamment pour simplifier les fractions, repérer les fractions égales ou résoudre des problèmes de divisibilité.

Voir la fiche méthode : Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Télécharger en PDF