Calcul littéral

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

1 - Expressions littérales

Définition

Une **expression littérale** est une expression mathématique qui contient une ou plusieurs lettres. Ces lettres désignent des nombres.

Exemple

Le périmètre P d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est donné par l'expression littérale :

$$P = 2 \times (L + \ell)$$

Conventions d'écriture

Dans une expression littérale, on peut **supprimer le signe** $\times$ lorsqu'il est placé :

- devant ou derrière une lettre ;
- devant ou derrière une parenthèse.

Exemple

- $4 \times a = 4a$
- $a \times 4 = 4a$ (on place le nombre devant la lettre)
- $b \times c = bc$
- $5 \times (x + 4) = 5(x + 4)$

Attention

On ne peut pas supprimer le signe $\times$ entre deux nombres : $4 \times 5 \neq 45$.

Cas particuliers

Pour tout nombre a :

- $1 \times a = a$ (on n'écrit pas $1a$ mais a)
- $0 \times a = 0$
- $a \times a = a^2$ (se lit « a au carré »)
- $a \times a \times a = a^3$ (se lit « a au cube »)

Exemple

- $5 \times 5 = 5^2 = 25$
- $(-6) \times (-6) = (-6)^2 = 36$
- $7 \times 7 \times 7 = 7^3 = 343$

Remarque

Pour simplifier un produit de plusieurs facteurs, on peut modifier l'ordre des facteurs (la multiplication est **commutative**).

Exemple

Réduire $H = 2 \times b \times 7$.

$H = 2 \times b \times 7$

$H = 2 \times 7 \times b$

$H = 14 \times b$

$H = 14b$

2 - Structure d'une expression

Définition

- Une **somme** (ou **différence**) est une expression dont la dernière opération effectuée est une addition ou une soustraction. Chaque élément séparé par un $+$ ou un $-$ s'appelle un **terme**.
- Un **produit** est une expression dont la dernière opération effectuée est une multiplication. Chaque élément multiplié s'appelle un **facteur**.

Exemple

- $3x + 7$ est une **somme** de deux termes : $3x$ et 7.
- $5(x - 2)$ est un **produit** de deux facteurs : 5 et $(x - 2)$.
- $2x + 3y - 4$ est une **somme** de trois termes : $2x$, $3y$ et -4.

Attention

Bien distinguer termes et facteurs est essentiel pour la suite du chapitre :

- **Développer**, c'est transformer un produit en somme.
- **Factoriser**, c'est transformer une somme en produit.

3 - Réduire une expression

Définition

Réduire une expression littérale, c'est regrouper les **termes semblables** (les termes qui ont la même partie littérale) pour obtenir une écriture plus courte.

Exemple

Réduire les expressions suivantes :

$A = 3x + 5x - 2x$
$A = (3 + 5 - 2)x$
$A = 6x$

$B = 4x^2 - 3x + x^2 + 7x$
$B = 4x^2 + x^2 - 3x + 7x$
$B = 5x^2 + 4x$

Attention

On ne peut regrouper que les termes qui ont **exactement la même partie littérale**. On ne peut pas additionner des termes en x avec des termes en x^2

.

Exemple

$C = 3x^2 + 2x - x^2 + 5 - 4x + 1$
$C = 3x^2 - x^2 + 2x - 4x + 5 + 1$
$C = 2x^2 - 2x + 6$

4 - Développer avec la distributivité

Définition

Développer un produit, c'est le transformer en somme (ou en différence).

Distributivité simple

Pour tous nombres relatifs k, a et b :

$$k(a+b) = ka + kb$$
$$k(a-b) = ka - kb$$

Le facteur k est « distribué » à chacun des termes de la parenthèse.

Exemple

Développer $A = 7(4+x)$:

$A = 7 \times 4 + 7 \times x$

$A = 28 + 7x$

Exemple

Développer $B = 3(x-4)$:

$B = 3 \times x - 3 \times 4$

$B = 3x - 12$

Développer et réduire

Développer et réduire $C = 5(2x+3) - 4x$:

$C = 5 \times 2x + 5 \times 3 - 4x$

$C = 10x + 15 - 4x$

$C = 6x + 15$

Attention

Quand un signe $-$ précède une parenthèse, on distribue le facteur -1 à chaque terme :

$-(a + b) = -a - b$

$-(a - b) = -a + b$

Exemple

Développer et réduire $D = 3(x + 2) - (x - 5)$:

$D = 3x + 6 - x + 5$

$D = 2x + 11$

Avec un facteur littéral

Développer $E = x(x - 4)$:

$E = x \times x - x \times 4$

$E = x^2 - 4x$

5 - Factoriser une expression

Définition

Factoriser une expression, c'est la transformer en produit en identifiant un **facteur commun**.

Factorisation par un facteur commun

Pour tous nombres relatifs k, a et b :

$$ka + kb = k(a + b)$$
$$ka - kb = k(a - b)$$

Exemple

Factoriser $F = 3x + 6$:

On identifie le facteur commun : 3 est commun à $3x$ et 6 car $6 = 3 \times 2$.

$F = 3 \times x + 3 \times 2$

$F = 3(x+2)$

Exemple

Factoriser $G = 7x - 2x$:

Le facteur commun est x.

$G = 7 \times x - 2 \times x$

$G = (7-2) \times x$

$G = 5x$

En factorisant $7x - 2x$, on a réduit l'expression : factoriser revient ici à réduire des termes semblables.

Exemple

Factoriser $H = 5x^2 - 10x$:

On cherche le facteur commun le plus complet possible. Ici, $5x$ convient car $5x^2 = 5x \times x$ et $10x = 5x \times 2$.

$H = 5x \times x - 5x \times 2$

$H = 5x(x-2)$

6 - Valeur numérique d'une expression

Définition

Calculer la **valeur numérique** d'une expression littérale, c'est remplacer chaque lettre par un nombre donné, puis effectuer le calcul.

Exemple

Calculer la valeur de $A = 3x^2 - 5x + 2$ pour $x = 4$.

$A = 3 \times 4^2 - 5 \times 4 + 2$

$A = 3 \times 16 - 20 + 2$

$A = 48 - 20 + 2$

$A = 30$

Exemple

Montrer que les expressions $B = 2(x + 3)$ et $C = 2x + 6$ sont égales pour tout nombre x.

On développe B :

$B = 2 \times x + 2 \times 3 = 2x + 6$

On retrouve l'expression C, donc $B = C$ pour tout nombre x.

Remarque

Tester l'égalité avec quelques valeurs particulières ne suffit pas à **prouver** qu'elle est vraie pour tout nombre. Il faut utiliser le calcul littéral (développer ou factoriser) pour le démontrer.

7 - Programmes de calcul

Définition

Un **programme de calcul** est une suite d'instructions qui, à partir d'un nombre de départ, produit un résultat. On peut le traduire par une expression littérale en notant x le nombre de départ.

Exemple

Traduire le programme de calcul suivant par une expression littérale :

Choisir un nombre.
Multiplier par 4.
Ajouter 7.

On note x le nombre choisi au départ.

- On multiplie par 4 : on obtient $4x$.
- On ajoute 7 : on obtient $4x + 7$.

Le programme de calcul se traduit par l'expression $4x + 7$.

Démontrer l'équivalence de deux programmes

On considère les deux programmes de calcul suivants :

Programme 1	**Programme 2**
Choisir un nombre.	Choisir un nombre.
Ajouter 7.	Multiplier par 8.
Multiplier par 8.	Ajouter 56.

Montrer qu'ils donnent toujours le même résultat.

On note x le nombre de départ.

Programme 1 :

On ajoute 7 : on obtient $x + 7$.

On multiplie par 8 : on obtient $8(x + 7)$.

On développe : $8(x + 7) = 8x + 56$.

Programme 2 :

On multiplie par 8 : on obtient $8x$.

On ajoute 56 : on obtient $8x + 56$.

Les deux programmes donnent la même expression $8x + 56$. Ils produisent donc toujours le même résultat, quel que soit le nombre de départ.

Les questions essentielles

1. Comment développer une expression avec la distributivité ?

Pour développer $k(a+b)$, on multiplie le facteur k par chacun des termes de la parenthèse : $k(a+b) = ka + kb$. Puis on réduit l'expression si possible.

Voir la fiche méthode : Développer une expression avec la distributivité ↗

2. Comment factoriser une expression ?

On identifie un facteur commun à tous les termes, puis on applique la distributivité « à l'envers » : $ka + kb = k(a+b)$. On cherche le facteur commun le plus complet possible.

Voir la fiche méthode : Factoriser une expression ↗

3. Comment réduire une expression littérale ?

On regroupe les termes qui ont la même partie littérale. On ne peut pas additionner des termes en x avec des termes en x^2, ni des termes en x avec des nombres seuls.

Voir la fiche méthode : Réduire une expression littérale ↗

4. Comment calculer la valeur numérique d'une expression ?

On remplace chaque lettre par le nombre donné en respectant les priorités opératoires, puis on effectue le calcul.

Voir la fiche méthode : Calculer la valeur numérique d'une expression ↗

5. Comment démontrer que deux programmes de calcul sont équivalents ?

On traduit chaque programme en expression littérale, on développe ou on factorise, et on montre que les deux expressions obtenues sont identiques.

Voir la fiche méthode : Démontrer l'équivalence de deux programmes de calcul ↗