

Vecteurs et droites

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Déterminer une équation cartésienne connaissant un point et un vecteur directeur

Déterminer une équation cartésienne d'une droite passant par deux points

Trouver un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation cartésienne

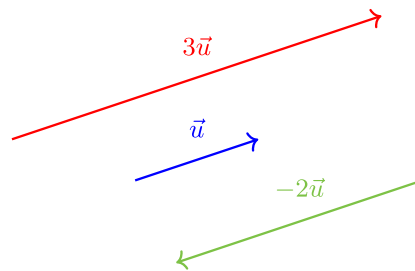
Étudier la position relative de deux droites à partir de leurs équations cartésiennes

Calculer les coordonnées du centre de gravité d'un triangle

1. Vecteurs et repère cartésien

Définition (Vecteurs colinéaires)

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$



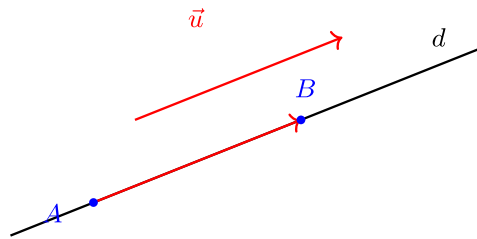
Vecteurs colinéaires

Remarque

- Par convention, on considère que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan
- Deux vecteurs colinéaires ont la même « direction » ; ils ont le même sens si $k > 0$ et sont de sens contraire si $k < 0$.

Définition

On dit que le vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite d si et seulement si il existe deux points A et B de d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



Vecteur directeur

Propriété

Trois points distincts A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Théorème et définitions

Soient O un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs **non colinéaires** du plan.

Le triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle un **repère cartésien** du plan.

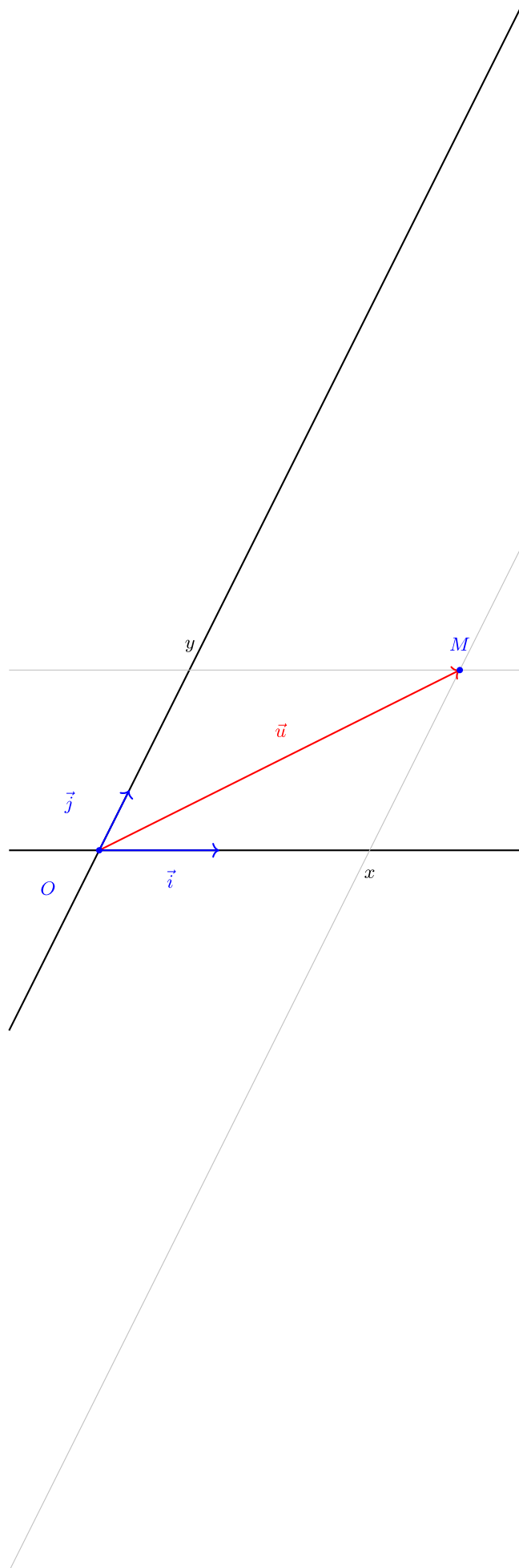
- Pour tout point M du plan, il existe deux réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe deux réels x et y tels que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Le couple $(x; y)$ s'appelle le couple de **coordonnées** du point M (ou du vecteur $\vec{u}$) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$



Remarque

Dans ce chapitre, les repères utilisés ne seront pas nécessairement orthonormés.

L'étude spécifique des repères orthonormés sera détaillée dans le chapitre « produit scalaire ».

Propriété

On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$
- Le milieu M de $[AB]$ a pour coordonnées $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement si :

$$xy' - x'y = 0$$

2. Équations de droites

Dans cette partie, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (non nécessairement orthonormé).

Théorème

Soit d une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un point M appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Exemple

Soient le point $A(0; 1)$ et le vecteur $\vec{u}(1; -1)$. Le point $M(x; y)$ appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et

$\vec{u}$ sont colinéaires. Or les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x; y - 1)$ donc :

$$M \in d \Leftrightarrow x \times (-1) - (y - 1) \times 1 = 0 \Leftrightarrow -x - y + 1 = 0$$

Cette dernière égalité s'appelle une équation cartésienne de la droite d .

Théorème

Toute droite du plan possède une **équation cartésienne** du type :

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont trois réels.

Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est une droite.

Remarque

- Une droite possède une infinité d'équation cartésienne (il suffit de multiplier une équation par un facteur non nul pour obtenir une équation équivalente).
- Si $b \neq 0$ l'équation peut s'écrire :

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

qui est de la forme $y = mx + p$ (en posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$).

Cette forme est appelée **équation réduite** de la droite.

Ce cas correspond à une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

- Si $b = 0$ et $a \neq 0$ l'équation peut s'écrire :

$$ax + c = 0 \Leftrightarrow ax = -c \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$$

qui est du type $x = k$ (en posant $k = -\frac{c}{a}$)

Ce cas correspond à une droite qui est parallèle à l'axe des ordonnées.

Propriété

Soit d une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite d .

Démonstration

Voir exercice : « Équation cartésienne - Vecteur directeur ».

Théorème

Soient $A(x_A; y_A)$ un point et $\vec{u}(\alpha; \beta)$ un vecteur non nul.

La droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour équation cartésienne :

$$\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$$

Exemple

Soient $A(2; 1)$ et $\vec{u}(3; -1)$.

La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ a pour équation :

$$-1 \times (x - 2) - 3 \times (y - 1) = 0$$

$$-x + 2 - 3y + 3 = 0$$

Soit, après simplification :

$$x + 3y - 5 = 0$$

Propriété

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts.

Une équation cartésienne de la droite (AB) est :

$$(y_B - y_A)(x - x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0$$

Exemple

Soient $A(1; 2)$ et $B(4; 3)$.

On a $x_B - x_A = 3$ et $y_B - y_A = 1$, donc une équation de (AB) est :

$$1 \times (x - 1) - 3 \times (y - 2) = 0$$

$$x - 1 - 3y + 6 = 0$$

$$x - 3y + 5 = 0$$

3. Centre de gravité d'un triangle

Propriété

Soient $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ trois points non alignés.

Le centre de gravité G du triangle ABC est le point d'intersection des trois médianes. Ses coordonnées sont :

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Remarque

Le centre de gravité G est aussi caractérisé par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

De plus, pour toute médiane (AA') (où A' est le milieu de $[BC]$) :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}$$

Les questions essentielles

1. Comment déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur directeur ?

On applique la formule $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$, où $A(x_A; y_A)$ est le point et $\vec{u}(\alpha; \beta)$ le vecteur directeur, puis on développe pour obtenir la forme $ax + by + c = 0$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer une équation cartésienne connaissant un point et un vecteur directeur](#)

2. Comment trouver une équation cartésienne d'une droite passant par deux points ?

On calcule d'abord les coordonnées du vecteur

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, puis on applique la formule avec A et $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur.

Voir la fiche méthode : [Déterminer une équation cartésienne d'une droite passant par deux points](#)

3. Comment lire un vecteur directeur sur une équation cartésienne ?

Si la droite a pour équation $ax + by + c = 0$, alors $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur. On permute a et b , puis on change le signe du premier.

Voir la fiche méthode : [Trouver un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation cartésienne](#)

4. Comment étudier la position relative de deux droites à partir de leurs équations cartésiennes ?

On calcule le déterminant $ab' - a'b$. S'il est non nul, les droites sont sécantes ; s'il est nul, elles sont parallèles (confondues ou strictement parallèles, à vérifier en testant un point).

Voir la fiche méthode : [Étudier la position relative de deux droites à partir de leurs équations cartésiennes](#)

5. Comment calculer les coordonnées du centre de gravité d'un triangle ?

Les coordonnées de G sont les moyennes des coordonnées des trois sommets : $G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$.

Voir la fiche méthode : [Calculer les coordonnées du centre de gravité d'un triangle](#)

 Télécharger en PDF