

Polynômes et équations du second degré

DURÉE ESTIMÉE

30 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Mettre un trinôme sous forme canonique

Résoudre une équation du second degré

Factoriser un trinôme du second degré

Étudier le signe d'un trinôme

Résoudre une inéquation du second degré

Utiliser somme et produit des racines

1. Fonctions polynômes

Définition

Une fonction P est une **fonction polynôme** si elle est définie sur $\mathbb{R}$ et si on peut l'écrire sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Remarques

- par abus de langage, on dit souvent polynôme au lieu de fonction polynôme.
- les nombres a_i s'appellent les **coefficients** du polynôme.

Définition (Degré d'un polynôme)

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (où le coefficient a_n est non nul), on dit que P est une fonction polynôme de **degré** n .

Cas particuliers

- la fonction nulle n'a pas de degré.
- une fonction constante non nulle définie par $f(x) = a$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 0.
- une fonction affine $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 1.

Propriété

Le produit d'un polynôme de degré n par un polynôme de degré m est un polynôme de degré $m + n$.

Remarque

Il n'existe pas de formule donnant le degré d'une somme de polynôme. On peut tout au plus dire que le degré de $P + Q$ est inférieur ou égal à la fois au degré de P et au degré de Q .

Propriété

Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Cas particulier

P est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Définition

On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une racine du polynôme P si et seulement si $P(a) = 0$.

Exemple

1 est racine du polynôme $P(x) = x^3 - 2x + 1$ car $P(1) = 0$

Théorème

Si P est un polynôme de degré $n \geq 1$ et si a est une racine de P alors $P(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = (x - a) Q(x)$$

où Q est un polynôme de degré $n - 1$.

2. Fonctions polynômes du second degré

Définition

On appelle **polynôme (ou trinôme) du second degré** toute expression pouvant se mettre sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemple

- $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$ est un polynôme du second degré.
- $P(x) = x^2 - 1$ est un polynôme du second degré avec $b = 0$ mais $Q(x) = x - 1$ n'en est pas un car a n'est pas différent de zéro (c'est un polynôme du premier degré - ou une fonction affine).
- $P(x) = 5(x - 1)(3 - 2x)$ est un polynôme du second degré car en développant on obtient une expression du type souhaité.

Théorème et définition

Tout polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Cette expression s'appelle **forme canonique** du polynôme P .

Définition

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Propriété (Racines d'un polynôme du second degré)

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

- n'a aucune solution réelle si $\Delta < 0$;
- a une solution unique $x_0 = \alpha = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$;
- a deux solutions $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.

Exemple

- $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$:

$$\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1.$$

P_1 possède 2 racines :

$$x_1 = \frac{-3 - 1}{-2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-3 + 1}{-2} = 1$$

- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$:

$$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 4 = 0.$$

P_2 possède une seule racine :

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2.$$

- $P_3(x) = x^2 + x + 1$:

$$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3.$$

P_3 ne possède aucune racine.

Théorème (Factorisation du trinôme)

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux racines x_1 et x_2 , et se factorise sous la forme $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, P admet une racine double x_0 et se factorise sous la forme $P(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, P ne peut pas être factorisé comme produit de polynômes du premier degré à coefficients réels.

Exemple

En reprenant les polynômes de l'exemple précédent :

- $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$ a pour racines 1 et 2, donc $P_1(x) = -(x - 1)(x - 2)$.
- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$ a une racine double 2, donc $P_2(x) = (x - 2)^2$.

- $P_3(x) = x^2 + x + 1$ ne peut pas être factorisé (à coefficients réels).

Propriété (Somme et produit des racines)

Soit un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ dont le discriminant est strictement positif.

- La somme des racines vaut $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
- Le produit des racines vaut $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Remarque

Ces propriétés sont souvent utilisées pour résoudre rapidement une équation qui possède une racine « évidente ».

Par exemple l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet $x_1 = 1$ comme racine puisque $1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$; comme $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = 3$ l'autre racine est $x_2 = 3$.

🛡️ Propriété (Signe d'un polynôme du second degré)

Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$:

- est toujours du signe de a si $\Delta < 0$;
- est toujours du signe de a mais s'annule en $x_0 = \alpha = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$;
- est du signe de a « à l'extérieur des racines » (c'est à dire sur $]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$) et du signe opposé « entre les racines » (sur $]x_1 ; x_2[$).

📌 Remarque

Suivant chacun des cas on peut représenter le tableau de signe de P de la façon suivante :

- **Si $\Delta > 0$:** $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines (c'est à dire si $x < x_1$ ou $x > x_2$) et du signe opposé entre les racines (si $x_1 < x < x_2$).

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

- **Si $\Delta = 0$:** $P(x)$ est toujours du signe de a sauf en x_0 (où il s'annule).

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta < 0$: $P(x)$ est toujours du signe de a .

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

Exemple

Si l'on reprend les exemples précédents :

- $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$:

$\Delta > 0$ et $a < 0$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$P(x)$	-	0	+	0	-

- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$:

$$\Delta = 0 \text{ et } a > 0.$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$+$

- $P_3(x) = x^2 + x + 1 :$

$$\Delta < 0 \text{ et } a > 0.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	

💡 Résolution d'une inéquation du second degré

Réolvons l'inéquation $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Calcul du discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$, donc $\Delta > 0$.

Le trinôme admet deux racines : $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$.

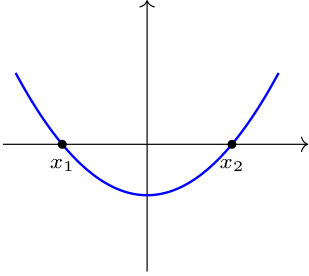
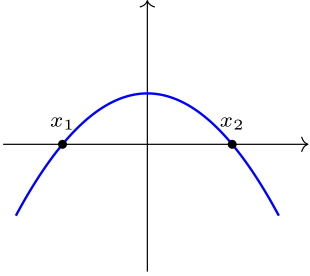
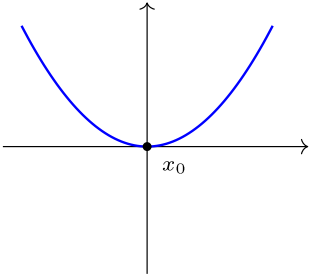
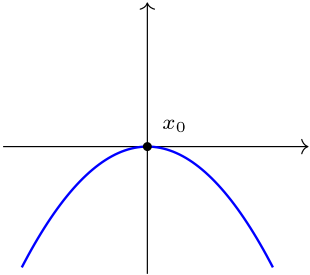
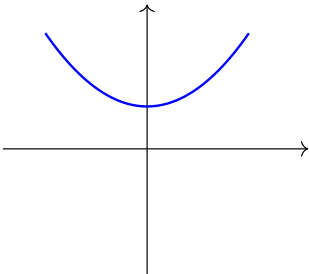
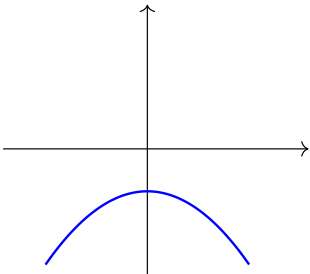
Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif « à l'extérieur des racines » et négatif entre les racines.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$S =]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$$

On rappelle que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des **points d'intersection de la courbe C_f et de l'axe des abscisses**.

En regroupant les propriétés de ce chapitre et celles vues en Seconde on peut résumer ces résultats dans le tableau :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	 2 racines : x_1 et x_2	 2 racines : x_1 et x_2
$\Delta = 0$	 1 racine double : x_0	 1 racine double : x_0
$\Delta < 0$	 Pas de racine	 Pas de racine

1. Comment mettre un trinôme sous forme canonique ?

On identifie les coefficients a, b, c , puis on calcule $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$ pour écrire $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette forme donne le sommet de la parabole.

Voir la fiche méthode : [Mettre un trinôme sous forme canonique](#)

2. Comment résoudre une équation du second degré ?

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, puis on conclut selon son signe : $\Delta < 0$ (aucune solution), $\Delta = 0$ (une solution double) ou $\Delta > 0$ (deux solutions distinctes).

Voir la fiche méthode : [Résoudre une équation du second degré](#)

3. Comment factoriser un trinôme du second degré ?

Si $\Delta > 0$, la factorisation est $a(x - x_1)(x - x_2)$. Si $\Delta = 0$, elle est $a(x - x_0)^2$. Si $\Delta < 0$, le trinôme n'est pas factorisable avec des coefficients réels.

Voir la fiche méthode : [Factoriser un trinôme du second degré](#)

4. Comment étudier le signe d'un trinôme ?

On calcule Δ et on applique la règle « signe de a à l'extérieur des racines, signe opposé entre les racines » lorsque $\Delta > 0$. Si $\Delta \leq 0$, le trinôme reste du signe de a .

Voir la fiche méthode : [Étudier le signe d'un trinôme](#)

5. Comment résoudre une inéquation du second degré ?

On regroupe tout d'un même côté pour obtenir $ax^2 + bx + c \square 0$, puis on étudie le signe du trinôme et on lit l'ensemble des solutions dans le tableau de signes.

Voir la fiche méthode : [Résoudre une inéquation du second degré](#)

6. Comment utiliser somme et produit des racines ?

Quand on a trouvé une racine évidente x_1 d'un trinôme, on obtient l'autre racine grâce à $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ (produit) ou $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ (somme), sans calculer le discriminant.

Voir la fiche méthode : [Utiliser somme et produit des racines](#)

 **Télécharger en PDF**