

Les suites : Généralités

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Algorithme de calcul des premiers termes d'une suite

Montrer qu'une suite est croissante (ou décroissante)

Calculer les premiers termes d'une suite

Représenter graphiquement une suite et conjecturer sa limite

Étudier les variations d'une suite avec la fonction associée

I - Définition d'une suite

Définition

Une **suite** u associe à tout entier naturel n un nombre réel noté u_n .

Les nombres réels u_n sont les **termes** de la suite.

Les nombres entiers n sont les **indices** ou les **rangs**.

La suite u peut également se noter (u_n) ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Remarque

Intuitivement, une suite est une liste infinie et ordonnée de nombres réels. Ces nombres réels sont les termes de la suite et les indices correspondent à la position du terme dans la liste.

Exemple

Par exemple la liste 1,6 ; 2,4 ; 3,2 ; 5 ; ... correspond à la suite (u_n) suivante :

$$u_0 = 1,6 \text{ (terme de rang 0)}$$

$$u_1 = 2,4 \text{ (terme de rang 1)}$$

$$u_2 = 3,2 \text{ (terme de rang 2)}$$

$$u_3 = 5 \dots$$

Remarque

Ne pas confondre l'écriture (u_n) avec parenthèses qui désigne la suite et l'écriture u_n sans parenthèse qui désigne le n -ième terme de la suite.

Définition

Une suite est définie de façon **explicite** lorsqu'on dispose d'une formule du type $u_n = f(n)$ permettant de calculer chaque terme de la suite à partir de son rang.

Exemple

La suite (u_n) définie par la formule explicite $u_n = \frac{2n+1}{3}$ est telle que

$$u_0 = \frac{1}{3}$$

$$u_1 = \frac{3}{3} = 1 \dots$$

$$u_{100} = \frac{201}{3} = 67$$

Définition

Une suite est définie par une relation de **récurrence** lorsqu'on dispose du premier terme et d'une formule du type $u_{n+1} = f(u_n)$ permettant de calculer chaque terme de la suite à partir du terme précédent..

Remarque

Il est possible de calculer un terme quelconque d'une suite définie par une relation de récurrence mais il faut au préalable calculer tout les termes précédents. Comme cela peut se révéler long, on utilise parfois un algorithme pour faire ce calcul.

Exemple

La suite (u_n) définie par la formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

est telle que :

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 2 \times u_0 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1$$

$$u_2 = 2 \times u_1 - 3 = 2 \times (-1) - 3 = -5$$

etc...

II - Représentation graphique d'une suite

Définition

La représentation graphique d'une suite (u_n) ($n \in \mathbb{N}$) dans un repère du plan, s'obtient en plaçant les points de coordonnées $(n; u_n)$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}$

Exemple

Pour représenter la suite définie par $u_n = 1 + \frac{3}{n+1}$ on calcule :

$$u_0 = 4$$

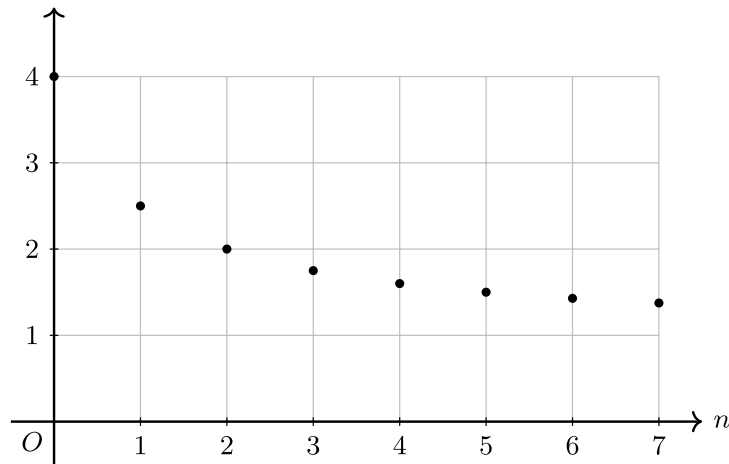
$$u_1 = \frac{5}{2}$$

$$u_2 = 2$$

$$u_3 = \frac{7}{4}$$

etc.

et on place les points de coordonnées : $(0; 4)$; $\left(1; \frac{5}{2}\right)$; $(2; 2)$; $\left(3; \frac{7}{4}\right)$ etc.



Représentation graphique de la suite définie par $u_n = 1 + \frac{3}{n+1}$

III - Sens de variation d'une suite

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est **croissante** (*resp. décroissante*) si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} \geq u_n$$

$$\text{resp. } u_{n+1} \leq u_n$$

On dit qu'une suite (u_n) est **strictement croissante** (*resp. strictement décroissante*) si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} > u_n$$

$$\text{resp. } u_{n+1} < u_n$$

On dit qu'une suite (u_n) est **constante** si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n$$

Remarque

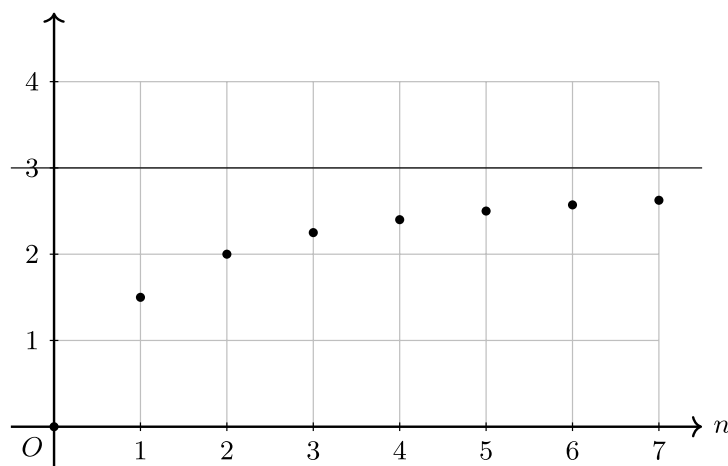
- Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante, ni constante. C'est le cas, par exemple de la suite définie par $u_n = (-1)^n$ dont les termes valent successivement : $1; -1; 1; -1; 1; -1$; etc.
- En pratique pour savoir si une suite (u_n) est croissante ou décroissante, on calcule souvent $u_{n+1} - u_n$:
- si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u_n est croissante

- si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u_n est décroissante
- si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u_n est constante.

IV - Notion de limite

Définition

On dit que la suite u_n **converge** vers le nombre réel l (ou **admet pour limite** le nombre réel l) si les termes de la suite se rapprochent de l lorsque n devient grand.



Suite convergente vers 3

Remarque

- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

- La limite, si elle existe, est **unique**.

💡 Exemple

- La suite définie pour $n > 0$ par $u_n = \frac{1}{n}$, **converge vers zéro**

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$u_n = \frac{1}{n}$	1	0,5	0,33	0,25	0,2	0,17	0,14	...

- La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est **divergente**. En effet, les termes de la suite « oscillent » indéfiniment entre 1 et -1

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$u_n = (-1)^n$	1	-1	1	-1	1	-1	1	...

- La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

est elle aussi **divergente**. Les termes de la suite croissent indéfiniment en ne se rapprochant d'aucun nombre réel.

n	0	1	2	3	4	5	6	...
u_n	1	3	5	7	9	11	13	...

1. Comment calculer les premiers termes d'une suite ?

Si la suite est définie explicitement par $u_n = f(n)$, on remplace n par sa valeur. Si elle est définie par récurrence, on calcule de proche en proche à partir du premier terme.

Voir la fiche méthode : [Calculer les premiers termes d'une suite](#)

2. Comment représenter graphiquement une suite et deviner sa limite ?

On place dans un repère les points $(n; u_n)$ pour les premiers rangs, puis on observe leur comportement : rapprochement d'une droite horizontale, divergence vers l'infini ou oscillation.

Voir la fiche méthode : [Représenter graphiquement une suite et conjecturer sa limite](#)

3. Comment savoir si une suite est croissante ou décroissante ?

Trois méthodes principales : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$, utiliser la fonction associée, ou raisonner par récurrence selon la définition de la suite.

Voir la fiche méthode : [Montrer qu'une suite est croissante \(ou décroissante\)](#)

4. Comment étudier les variations d'une suite à partir de sa fonction associée ?

Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$ (par exemple avec sa dérivée) et on transpose la conclusion à la suite.

Voir la fiche méthode : [Étudier les variations d'une suite avec la fonction associée](#)

5. Comment écrire un algorithme pour calculer les termes d'une suite ?

On utilise une boucle « Pour » qui applique la relation de récurrence autant de fois que nécessaire, en mettant à jour une variable unique contenant le terme courant.

Voir la fiche méthode : [Algorithme de calcul des premiers termes d'une suite](#)