

Suites arithmétiques et géométriques

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Montrer qu'une suite est arithmétique

Montrer qu'une suite est géométrique

Calculer un terme d'une suite arithmétique

Calculer un terme d'une suite géométrique

Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

1. Suites arithmétiques

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r s'appelle la **raison** de la suite arithmétique.

Remarque

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on pourra calculer la différence $u_{n+1} - u_n$.

Si on constate que la différence est une constante r , on pourra affirmer que la suite est arithmétique de raison r .

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 5$.

$$u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) + 5 - (3n + 5) = 3n + 3 + 5 - 3n - 5 = 3$$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$

Propriété

Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et k :

$$u_n = u_k + (n - k) \times r$$

En particulier :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Démonstration

On écrit successivement les relations $u_{k+1} = u_k + r$ en partant de u_0 :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$$

$$u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r$$

...

$$u_n = u_{n-1} + r = u_0 + n \times r$$

À chaque étape on ajoute r , et il y a n étapes pour passer de u_0 à u_n .

La formule générale $u_n = u_k + (n - k) \times r$ s'obtient de la même façon en partant de u_k au lieu de u_0 (on effectue alors $n - k$ étapes).

Exemple

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 5$.

$$u_{100} = 5 + 2 \times 100 = 205$$

Propriété

Réciproquement, si a et b sont deux nombres réels et si la suite (u_n) est définie par $u_n = a \times n + b$ alors cette suite est une suite arithmétique de raison $r = a$ et de premier terme $u_0 = b$.

Démonstration

$$u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an + b) = an + a + b - an - b = a$$

et

$$u_0 = a \times 0 + b = b$$

Propriété

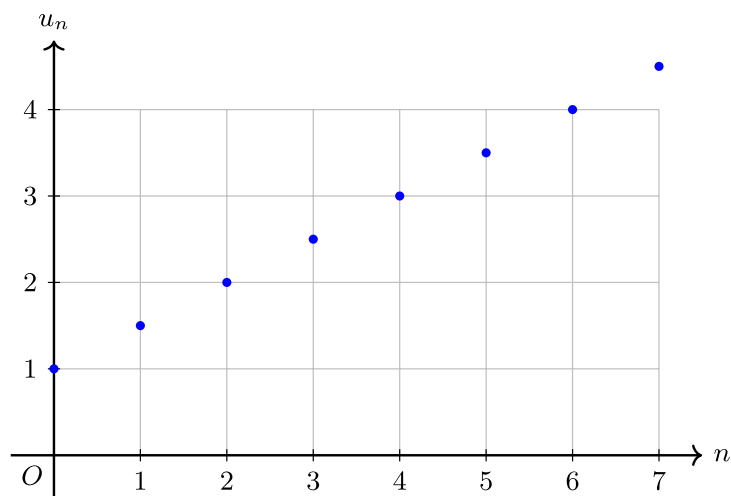
La représentation graphique d'une suite arithmétique est formée de points alignés.

Remarque

Cela se déduit immédiatement du fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = u_0 + n \times r$ donc les points représentant la suite sont sur la droite d'équation $y = rx + u_0$

Exemple



Suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = \frac{1}{2}$

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante
- si $r = 0$ alors (u_n) est constante
- si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration

Ce résultat découle immédiatement de $u_{n+1} - u_n = r$

Théorème (Somme des premiers entiers)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

Une démonstration astucieuse consiste à réécrire la somme en inversant l'ordre des termes :

$$S = 0 + 1 + 2 + \dots + n \quad (1)$$

$$S = n + n - 1 + n - 2 + \dots + 0 \quad (2)$$

Puis on additionne les lignes **(1)** et **(2)** termes à termes. Dans le membre de gauche on trouve que tous les termes sont égaux à n ($0 + n = n$; $1 + n - 1 = n$; $2 + n - 2 = n$, etc.). Comme en tout il y a $n + 1$ termes on trouve :

$$S + S = n + n + n + \dots + n$$

$$2S = n(n + 1)$$

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Exemple

Soit à calculer la somme $S_{100} = 1 + 2 + \dots + 100$

$$S_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

Propriété (Somme des termes d'une suite arithmétique)

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier terme :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier, pour une suite arithmétique (u_n) , la somme des termes de u_0 à u_n vaut :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Exemple

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 3$.

On veut calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.

Il y a 21 termes (de u_0 à u_{20}) et $u_{20} = 4 + 20 \times 3 = 64$.

$$S = 21 \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} = 21 \times \frac{4 + 64}{2} = 21 \times 34 = 714$$

2. Suites géométriques

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q s'appelle la **raison** de la suite géométrique (u_n) .

Remarque

Pour démontrer qu'une suite (u_n) dont les termes sont non nuls est une suite géométrique, on pourra calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si ce rapport est une constante q , on pourra affirmer que la suite est une suite géométrique de raison q .

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{3}{2^n}$.

Les termes de la suite sont tous strictement positifs et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2^{n+1}} \div \frac{3}{2^n}$$

$$= \frac{3}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3} = \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2^n}{2 \times 2^n} = \frac{1}{2}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Propriété

Si la suite (u_n) est géométrique de raison q , pour tous entiers naturels n et k :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

En particulier :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration

On écrit successivement les relations $u_{k+1} = q \times u_k$ en partant de u_0 :

$$u_1 = q \times u_0$$

$$u_2 = q \times u_1 = q^2 \times u_0$$

$$u_3 = q \times u_2 = q^3 \times u_0$$

...

$$u_n = q \times u_{n-1} = q^n \times u_0$$

À chaque étape on multiplie par q , et il y a n étapes pour passer de u_0 à u_n .

La formule générale $u_n = u_k \times q^{n-k}$ s'obtient de la même façon en partant de u_k au lieu de u_0 (on effectue alors $n - k$ étapes).

Propriété

Réciproquement, soient a et b deux nombres réels. La suite (u_n) définie par $u_n = a \times b^n$ est une suite géométrique de raison $q = b$ et de premier terme $u_0 = a$.

Démonstration

$$u_{n+1} = a \times b^{n+1} = a \times b^n \times b = u_n \times b$$

et

$$u_0 = a \times b^0 = a \times 1 = a$$

Donc (u_n) est bien une suite géométrique de raison b et de premier terme a .

Théorème

Soit (u_n) suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme strictement positif :

- Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante
- Si $q=1$, la suite (u_n) constante

Remarque

- Si le premier terme est strictement négatif, le sens de variation est inversé.
- Si la raison est strictement négative, la suite n'est ni croissante ni décroissante.

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $q \neq 1$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque

Cette formule n'est pas valable pour $q = 1$. Mais dans ce cas tous les termes de la somme valent 1 ; la somme est donc égale au nombre de termes $n + 1$.

Démonstration

On multiplie chaque membre par q . Cela incrémente chacun des exposants de q :

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \quad (1)$$

$$qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1} \quad (2)$$

On soustrait termes à termes les égalités (1) et (2) ; tous les termes se simplifient sauf le premier et le dernier :

$$S - qS = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + \dots + q^n - q^{n+1}$$

$$(1 - q) S = 1 - q^{n+1}$$

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple

Soit à calculer la somme $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \dots + 2^{10}$

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1 - 2^{10+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{1 - 2} \\
 &= \frac{-2047}{-1} = 2047
 \end{aligned}$$

① Lien avec la fonction exponentielle

Une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q > 0$ peut s'écrire :

$$u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times e^{n \ln q}$$

Si l'on pose $a = \ln q$, on a alors $u_n = u_0 \times e^{a n}$: la suite géométrique apparaît comme la version discrète (aux valeurs entières de n) de la fonction exponentielle $x \mapsto u_0 \times e^{a x}$.

C'est pour cette raison qu'une évolution à **taux constant** (croissance ou décroissance exponentielle) se modélise par une suite géométrique.

Les questions essentielles

1. Comment montrer qu'une suite est arithmétique ?

On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$: si le résultat est une constante, la suite est arithmétique et cette constante est sa raison.

Voir la fiche méthode : [Montrer qu'une suite est arithmétique](#)

2. Comment montrer qu'une suite est géométrique ?

Quand les termes sont non nuls, on calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: si le résultat est une constante, la suite est géométrique de raison ce quotient.

Voir la fiche méthode : [Montrer qu'une suite est géométrique](#)

3. Comment calculer un terme d'une suite arithmétique ?

On utilise la formule $u_n = u_0 + n \times r$ (ou $u_n = u_k + (n - k) \times r$) où r est la raison de la suite.

Voir la fiche méthode : [Calculer un terme d'une suite arithmétique](#)

4. Comment calculer un terme d'une suite géométrique ?

On utilise la formule $u_n = u_0 \times q^n$ (ou $u_n = u_k \times q^{n-k}$) où q est la raison de la suite.

Voir la fiche méthode : [Calculer un terme d'une suite géométrique](#)

5. Comment calculer la somme des termes d'une suite arithmétique ?

On applique la formule : $\text{somme} = \text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \div 2$.

Voir la fiche méthode : [Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique](#)

6. Comment calculer la somme des termes d'une suite géométrique ?

Pour $q \neq 1$, on utilise $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et on factorise par le premier terme si nécessaire.

Voir la fiche méthode : [Calculer la somme des termes d'une suite géométrique](#)

