

Trigonométrie

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Convertir un angle entre degrés et radians

Déterminer la mesure principale d'un angle

Placer le point image d'un réel sur le cercle trigonométrique

Calculer cosinus et sinus à l'aide des angles associés

Calculer $\cos(x)$ connaissant $\sin(x)$ (ou l'inverse)Résoudre une équation $\cos(x) = k$ ou $\sin(x) = k$

La **trigonométrie** étudie les liens entre les angles et les longueurs. En classe de Première, on prolonge les notions de sinus et cosinus vues au collège (dans un triangle rectangle) et en seconde, en les étendant à **tout nombre réel** grâce au **cercle trigonométrique**. On introduit aussi une nouvelle unité de mesure d'angle, le **radian**, mieux adaptée au calcul.

Dans tout le chapitre, le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1, appelé **cercle trigonométrique**.

1 - Cercle trigonométrique et radian

Radian

Un **radian** (noté rad) est la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur le cercle trigonométrique, un arc de longueur 1.

De façon générale, la mesure en radians d'un angle est égale à la longueur de l'arc qu'il intercepte sur le cercle trigonométrique.

Remarque

Comme le périmètre du cercle trigonométrique vaut 2π , un tour complet correspond à 2π radians (soit 360°), un demi-tour à π radians (soit 180°).

Conversion degrés ↔ radians

Si α_{rad} est la mesure en radians d'un angle et α_{deg} sa mesure en degrés, alors :

$$\frac{\alpha_{\text{rad}}}{\pi} = \frac{\alpha_{\text{deg}}}{180}$$

Exemple

Convertir 60° et 45° en radians.

$$\text{Pour } 60^\circ : \alpha_{\text{rad}} = \frac{60 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Pour } 45^\circ : \alpha_{\text{rad}} = \frac{45 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{4}.$$

Lien avec la trigonométrie du collège

Les définitions du sinus et du cosinus vues au collège dans un triangle rectangle se retrouvent à partir du cercle trigonométrique. Si M est un point du cercle tel que l'angle $\widehat{IOM} = \alpha$ (avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), le triangle OHM (où H est le projeté de M sur (Ox)) est rectangle en H et :

- $\cos(\alpha) = \frac{OH}{OM} = OH$ (abscisse de M)
- $\sin(\alpha) = \frac{HM}{OM} = HM$ (ordonnée de M)

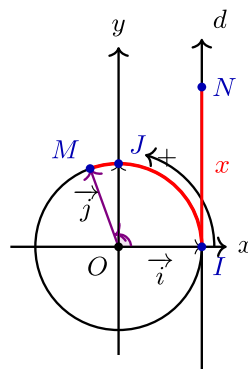
2 - Enroulement de la droite et mesures d'un angle orienté

Enroulement et mesure d'un angle orienté

Soit I le point de coordonnées $(1 ; 0)$ et d la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par I .

À tout réel x on associe le point N de la droite d d'ordonnée x , puis le point M obtenu en « enroulant » la droite d sur le cercle trigonométrique.

On dit que x est une **mesure en radians** de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ et que M est l'**image** du réel x sur le cercle trigonométrique.



Mesure en radians d'un angle orienté

Remarque

Une infinité de points de la droite d se superposent au même point M par enroulement (en faisant plusieurs tours).

Chaque angle possède donc une infinité de mesures qui diffèrent entre elles d'un multiple de 2π . Si x est une mesure d'un angle, les autres mesures sont de la forme :

$$x + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Mesure principale

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, il existe une **unique mesure** appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

Cette mesure est appelée **mesure principale** de l'angle.

Exemple

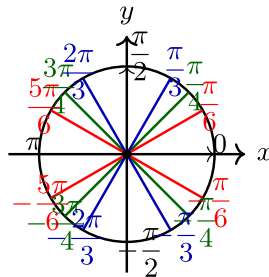
Soit un angle dont une mesure est $-\frac{5\pi}{2}$.

Comme $-\frac{5\pi}{2} \notin]-\pi ; \pi]$, ce n'est pas la mesure principale.

On écrit : $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$.

Comme $-\frac{\pi}{2} \in]-\pi ; \pi]$, la mesure principale de cet angle est $-\frac{\pi}{2}$.

💡 Mesures d'angles remarquables à connaître



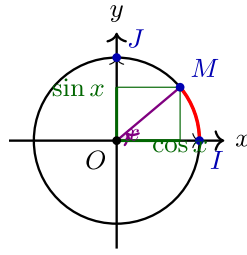
3 - Cosinus et sinus d'un nombre réel

📖 Cosinus et sinus

Soit M le point du cercle trigonométrique image d'un réel x .

On appelle :

- **cosinus** de x , noté $\cos(x)$, l'abscisse du point M ;
- **sinus** de x , noté $\sin(x)$, l'ordonnée du point M .



Sinus et cosinus d'un nombre réel

Encadrement et identité fondamentale

Pour tout réel x :

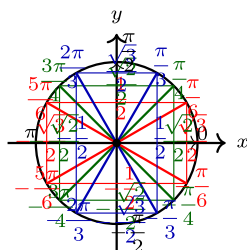
- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (identité fondamentale).

Remarque

La deuxième propriété est une conséquence directe du théorème de Pythagore appliqué au triangle OHM : comme $OM = 1$, on a $OH^2 + HM^2 = OM^2 = 1$, soit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

La notation $\cos^2(x)$ est une écriture abrégée pour $(\cos(x))^2$.

💡 Valeurs remarquables à connaître



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

① Démonstration des valeurs remarquables

Les valeurs $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se démontrent par le calcul, à partir du cercle trigonométrique et du théorème de Pythagore.

Cette démonstration (exigible au bac) est traitée dans l'exercice : [\[ROC\] Démonstration des valeurs remarquables en trigonométrie.](#)

Angles associés

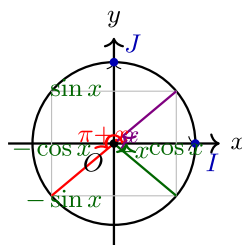
Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$ (symétrie par rapport à l'axe des abscisses)
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées)
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ (symétrie par rapport à l'origine)

Angles complémentaires

Pour tout réel x :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$



4 - Fonctions cosinus et sinus

Fonctions cosinus et sinus

La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $\cos(x)$.

La **fonction sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $\sin(x)$.

Parité

- La fonction cosinus est **paire** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction sinus est **impaire** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

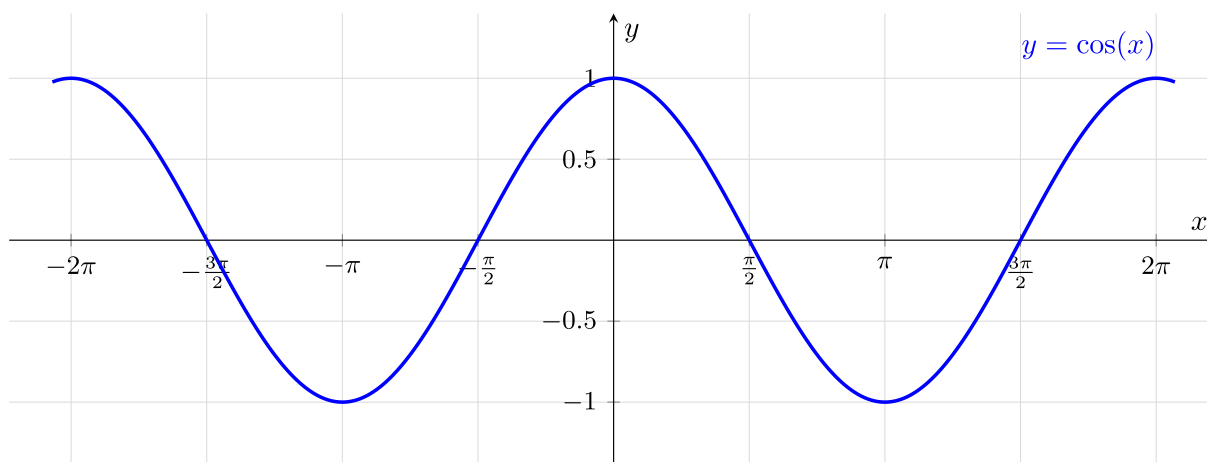
Périodicité

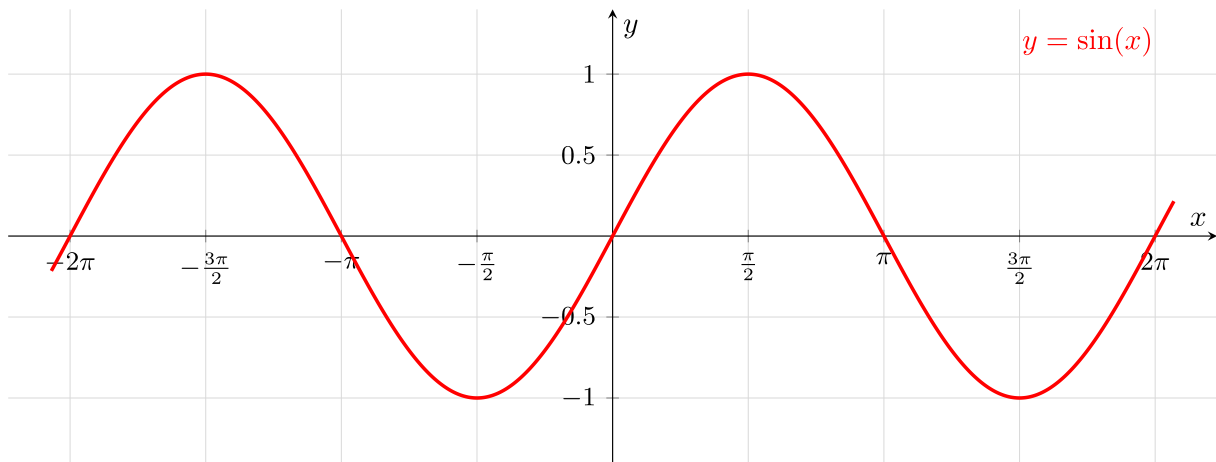
Les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période 2π** : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

Graphiquement, on obtient toute la courbe en répétant par translation le motif tracé sur un intervalle de longueur 2π .

Courbes représentatives





📖 Lecture graphique

- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (parité).
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine (imparité).
- Chaque motif de longueur 2π se répète à l'identique par translation : c'est la périodicité.
- Les deux courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation horizontale de $\frac{\pi}{2}$: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

5 - Équations trigonométriques

Équation $\cos(x) = \cos(a)$

Soit a un réel fixé. Les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ sont les réels de la forme :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = 0$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc l'équation est équivalente à $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

D'après le théorème précédent, les solutions sont :

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Équation $\sin(x) = \sin(a)$

Soit a un réel fixé. Les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ sont les réels de la forme :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, donc l'équation est équivalente à $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

D'après le théorème précédent, les solutions sont :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Les questions essentielles

1. Comment convertir un angle des degrés vers les radians (ou l'inverse) ?

Les mesures en degrés et en radians d'un même angle sont proportionnelles et vérifient $\frac{\alpha_{\text{rad}}}{\pi} = \frac{\alpha_{\text{deg}}}{180}$. Il suffit d'isoler l'inconnue pour passer d'une unité à l'autre.

Voir la fiche méthode : [Convertir un angle entre degrés et radians](#)

2. Comment déterminer la mesure principale d'un angle ?

On ajoute ou on retranche 2π à la mesure donnée jusqu'à obtenir l'unique mesure appartenant à l'intervalle $] -\pi ; \pi]$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer la mesure principale d'un angle](#)

3. Comment placer un réel sur le cercle trigonométrique et lire son cosinus et son sinus ?

On ramène le réel à sa mesure principale, on identifie le cadran, puis on place le point image en tournant depuis le point I .
L'abscisse donne le cosinus, l'ordonnée donne le sinus.

Voir la fiche méthode : [Placer le point image d'un réel sur le cercle trigonométrique](#)

4. Comment calculer le cosinus et le sinus d'un angle qui n'est pas dans le tableau des valeurs remarquables ?

On écrit l'angle sous la forme $-a$, $\pi - a$ ou $\pi + a$ avec a remarquable, puis on applique les formules des angles associés pour retrouver les valeurs connues.

Voir la fiche méthode : [Calculer cosinus et sinus à l'aide des angles associés](#)

5. Comment calculer $\cos(x)$ quand on connaît $\sin(x)$ (ou l'inverse) ?

On utilise l'identité fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, puis on choisit le bon signe en regardant le cadran du cercle trigonométrique dans lequel se trouve x .

Voir la fiche méthode : [Calculer \$\cos\(x\)\$ connaissant \$\sin\(x\)\$ \(ou l'inverse\)](#)

6. Comment résoudre une équation $\cos(x) = k$ ou $\sin(x) = k$?

On cherche une valeur remarquable a telle que $\cos(a) = k$ (ou $\sin(a) = k$), puis on applique les formules $\cos(x) = \cos(a)$ ou

$\sin(x) = \sin(a)$ qui donnent deux familles de solutions modulo 2π .

Voir la fiche méthode : [Résoudre une équation \$\cos\(x\) = k\$ ou \$\sin\(x\) = k\$](#)

 **Télécharger en PDF**