

Produit scalaire

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

5 méthodes pour calculer un produit scalaire

Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation

Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un vecteur normal

Déterminer une équation cartésienne de cercle

Utiliser la formule d'Al-Kashi pour calculer une longueur ou un angle

Déterminer un ensemble de points défini par un produit scalaire

1. Produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **nombre réel** noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

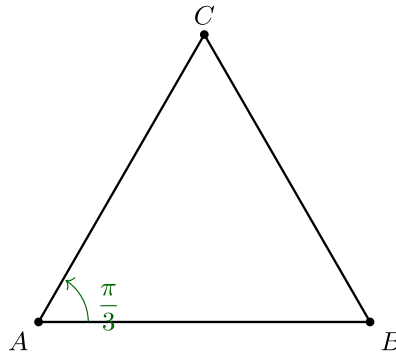
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, on pose par convention $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque

- **Attention** : le produit scalaire est un nombre réel et non un vecteur.
- On rappelle que $\|\overrightarrow{AB}\|$ (norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) désigne la longueur du segment AB .
- Le cosinus d'un angle étant égal au cosinus de l'angle opposé, $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$. Par conséquent le produit scalaire est **symétrique** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Exemple



ABC est un triangle équilatéral dont le côté mesure 1 unité.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Caractérisation de l'orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration

Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul et la propriété est vraie puisque, par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Si les deux vecteurs sont non nuls, leurs normes sont non nulles, donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}$$

Bilinéarité et symétrie

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Linéarité à gauche** : $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- **Linéarité à droite** (conséquence de la symétrie) : $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Carré scalaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Le **carré scalaire** de $\vec{u}$ est le réel noté $\vec{u}^2$ défini par :

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Démonstration

Le cosinus d'un angle nul vaut 1, donc $\cos(\vec{u}, \vec{u}) = 1$. Par conséquent :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$$

Identités de polarisation

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2)$$

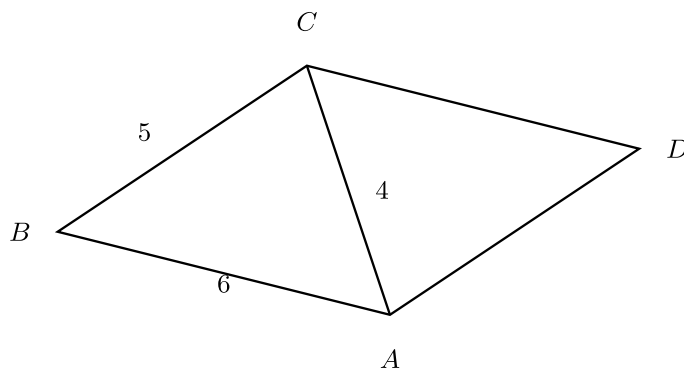
Démonstration

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v}^2 = ||\vec{u}||^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + ||\vec{v}||^2$$

Par conséquent $||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$, et on obtient la première égalité en divisant par 2.

On obtient la seconde égalité de la même manière en développant $(\vec{u} - \vec{v})^2$.

Exemple



$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$. On souhaite calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2 \right)$$

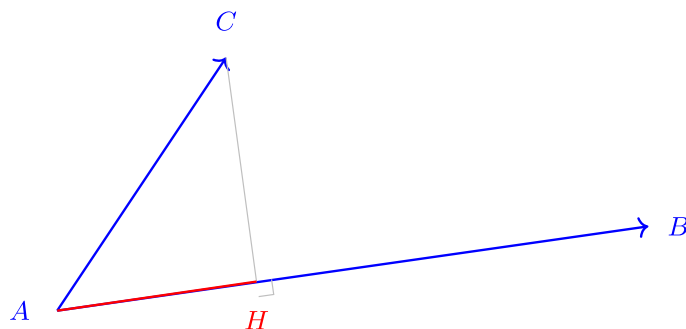
Or $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles. Par conséquent :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - AD^2) = \frac{1}{2} (16 - 36 - 25) = -\frac{45}{2}$$

Produit scalaire et projection orthogonale

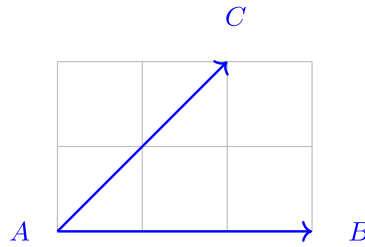
Soient A, B, C trois points du plan et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) . Alors :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.



$$\text{Ici : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

💡 Exemple



Sur la figure ci-dessus où l'unité est le carreau, le point C se projette orthogonalement sur la droite (AB) en un point H (non représenté) tel que $AH = 2$.

Par conséquent, l'angle $\widehat{BAC}$ étant aigu :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 3 \times 2 = 6$$

2. Produit scalaire dans un repère orthonormé

🔗 Expression en coordonnées

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration

Dire que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. De même $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\vec{i}^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + x'y\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j}^2$$

Or le repère est orthonormé, donc $\vec{i}^2 = \|\vec{i}\|^2 = 1$, $\vec{j}^2 = \|\vec{j}\|^2 = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. Par conséquent :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Norme en repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(x; y)$, alors :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration

C'est une conséquence directe du théorème précédent avec $\vec{u} = \vec{v}$:

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x \times x + y \times y = x^2 + y^2$$

Critère d'orthogonalité en coordonnées

Dans un repère orthonormé, deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si :

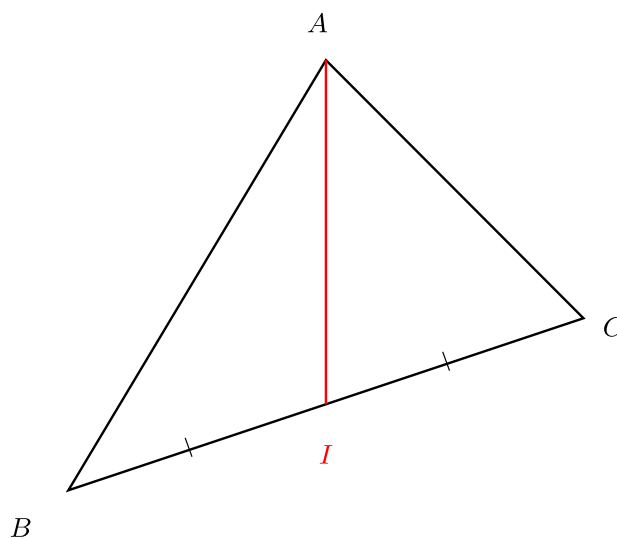
$$xx' + yy' = 0$$

3. Applications du produit scalaire

de la médiane

Soient ABC un triangle quelconque et I le milieu de $[BC]$. Alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$



Médiane dans un triangle

Remarque

La démonstration fait l'objet de l'exercice [Théorème de la médiane](#).

Formule d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle quelconque. Alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right)$$

Remarque

- La démonstration fait l'objet de l'exercice [Formule d'Al-Kashi](#).
- Si le triangle ABC est rectangle en A , alors $\cos \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = 0$. On retrouve alors le [théorème de Pythagore](#).

Transformation de MA·MB

Soient A et B deux points distincts du plan, et Ω le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = M\Omega^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Cercle de diamètre AB

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le **cercle de diamètre** $[AB]$.

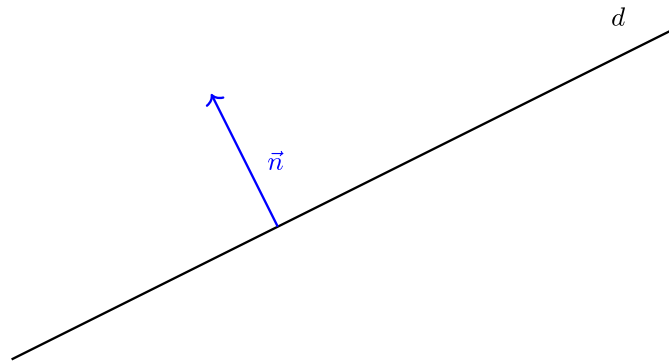
Remarque

Ces deux résultats sont démontrés dans l'exercice [Cercle de diamètre \$\[AB\]\$ et produit scalaire](#).

4. Géométrie repérée

Vecteur normal à une droite

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ non nul est **normal** à la droite d si et seulement si il est orthogonal à un vecteur directeur de d .



Vecteur $\vec{n}$ normal à la droite d

Équation cartésienne et vecteur normal

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La droite d de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où c est un nombre réel.

Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) est une droite dont $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal et $\vec{u}(-b; a)$ un vecteur directeur.

Remarque

La démonstration fait l'objet de l'exercice Vecteur directeur et vecteur normal d'une droite.

Équation cartésienne d'un cercle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $I(x_I; y_I)$ un point du plan et r un réel positif. Une équation du cercle de centre I et de rayon r est :

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$$

Démonstration

Le point $M(x; y)$ appartient au cercle si et seulement si $IM = r$. Comme IM et r sont positifs, cela équivaut à $IM^2 = r^2$. Or, d'après la propriété de la norme en coordonnées, $IM^2 = (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2$; on obtient donc le résultat annoncé.

Exemple

Le cercle de centre $\Omega(3; 4)$ et de rayon 5 a pour équation :

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

En développant :

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$$

Ce cercle passe par l'origine O car l'équation est vérifiée pour $x = 0$ et $y = 0$.

Remarque

Une autre utilisation du produit scalaire est la démonstration des formules d'addition et de soustraction des cosinus et sinus : voir l'exercice [Formule de soustraction des cosinus](#).

1. Comment calculer concrètement un produit scalaire ?

Selon les données disponibles, on peut utiliser la projection orthogonale, la formule avec le cosinus, une identité de polarisation sur les normes, les coordonnées dans un repère orthonormé ou encore la relation de Chasles. Chacune est adaptée à un type de situation différent.

Voir la fiche méthode : [5 méthodes pour calculer un produit scalaire](#)

2. Comment reconnaître un cercle à partir d'une équation et déterminer son centre et son rayon ?

À partir d'une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, on regroupe les termes en x et en y , puis on fait apparaître des carrés à l'aide d'[identités remarquables](#) pour se ramener à la forme $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma$. Le signe de γ permet de conclure.

Voir la fiche méthode : [Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation](#)

3. Comment déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un vecteur normal ?

Les coordonnées $(a; b)$ du vecteur normal donnent directement les coefficients de x et de y dans l'équation $ax + by + c = 0$. On calcule ensuite c en utilisant les coordonnées d'un point connu de la droite.

Voir la fiche méthode : [Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un vecteur normal](#)

4. Comment déterminer une équation cartésienne de cercle ?

Une fois le centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et le rayon r déterminés (directement, via un diamètre $[AB]$ ou un point du cercle), on applique la formule $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer une équation cartésienne de cercle](#)

5. Comment utiliser la formule d'Al-Kashi pour calculer une longueur ou un angle ?

La formule d'Al-Kashi permet de calculer le troisième côté d'un triangle connaissant deux côtés et l'angle qu'ils forment, ou de calculer un angle connaissant les trois côtés du triangle.

Voir la fiche méthode : [Utiliser la formule d'Al-Kashi pour calculer une longueur ou un angle](#)

6. Comment déterminer un ensemble de points défini par un produit scalaire ?

Pour un ensemble défini par $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, on introduit le milieu Ω de $[AB]$ et on applique la formule $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = M\Omega^2 - \frac{AB^2}{4}$.
On reconnaît alors un cercle, un point ou l'ensemble vide selon le signe obtenu.

Voir la fiche méthode : [Déterminer un ensemble de points défini par un produit scalaire](#)

📄 Télécharger en PDF