

Nombre dérivé – Fonction dérivée

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Calculer un nombre dérivé à l'aide de la définition

Déterminer l'équation d'une tangente à une courbe

Dériver une fonction polynôme

Dériver un produit de fonctions

Dériver un quotient de fonctions

Étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée

Dériver une fonction de la forme $x \mapsto g(ax+b)$

1. Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient 2 réels x_0 et $h \neq 0$ tels que $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$.

Le **taux de variation** (ou **taux d'accroissement**) de la fonction f entre x_0 et $x_0 + h$ est le nombre :

$$T = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Définition

Une fonction f est **dérivable** en x_0 si et seulement si le nombre $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a pour limite un certain réel l lorsque h tend vers 0.

l est appelée **nombre dérivé** de f en x_0 , on le note $f'(x_0)$.

On écrit : $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Remarque

- Le quotient $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$.
- « le nombre $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a pour limite un certain réel l lorsque h tend vers 0 » signifie que $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ se rapproche de l lorsque h se rapproche de 0.

Une définition plus rigoureuse de la notion de limite sera vue en Terminale.

- On peut également définir le nombre dérivé de la façon suivante :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(cela correspond au changement de variable $x = x_0 + h$)

Exemple

Calculons le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto x^2$ pour $x = 1$.

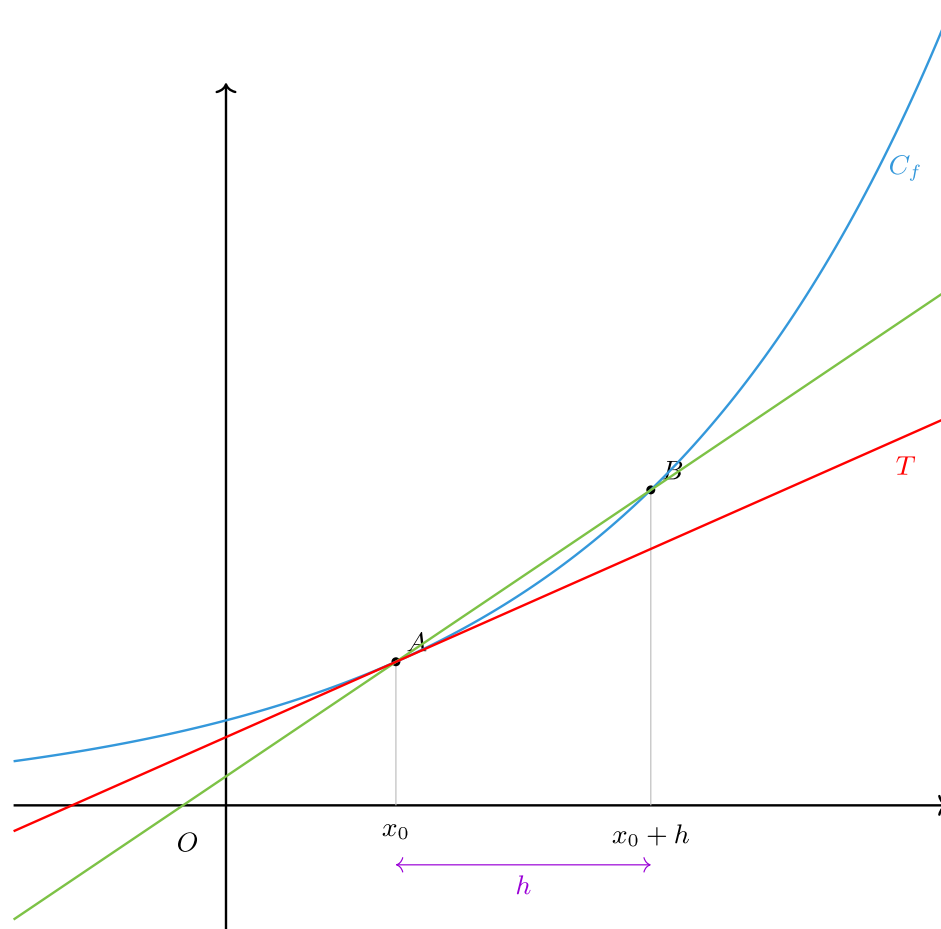
Ce nombre se note $f'(1)$ et vaut :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h$$

Or quand h tend vers 0, $2 + h$ tend vers 2 ; donc $f'(1) = 2$.

Remarque

Interprétation graphique du nombre dérivé :



Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

Lorsque h tend vers 0, B « se rapproche » de A et la droite (AB) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$.

Le nombre dérivée $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 .

Remarque

Interprétations du nombre dérivé en contexte :

- **Vitesse instantanée** : si $x(t)$ représente la position d'un mobile à l'instant t , le nombre dérivé $x'(t_0)$ est la *vitesse instantanée* du mobile à l'instant t_0 . C'est la limite de la vitesse moyenne $\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$ lorsque la durée h tend vers 0.
- **Coût marginal** : si $C(q)$ est le coût total de production de q unités, le nombre dérivé $C'(q_0)$ approche le *coût marginal* $C(q_0 + 1) - C(q_0)$, c'est-à-dire le coût de production d'une unité supplémentaire (voir l'exercice [Coût marginal](#)).

Propriété

Soit f une fonction dérivable en x_0 de courbe représentative $\mathcal{C}_f$, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Démonstration

D'après la propriété précédente, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est une droite de coefficient directeur $f'(x_0)$. Son équation est donc de la forme :

$$y = f'(x_0) x + b$$

On sait que la tangente passe par le point A de coordonnées $(x_0; f(x_0))$ donc :

$$f(x_0) = f'(x_0) x_0 + b$$

$$b = -f'(x_0) x_0 + f(x_0)$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y = f'(x_0) x - f'(x_0) x_0 + f(x_0)$$

Soit :

$$y = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0)$$

2. Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est **dérivable** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, le nombre dérivé $f'(x)$ existe.

La fonction qui à $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x s'appelle la **fonction dérivée** et se note f'

Propriété

Dérivée des fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$k \ (k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{Z}, n < 0)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Remarque

La formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ reste valable pour les exposants entiers négatifs, sur $\mathbb{R}^*$. Par exemple, pour $f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, on obtient

$$f'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

Propriété

Formules de base :

Si u et v sont 2 fonctions dérivables sur un intervalle I . Sur cet intervalle :

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$ku \ (k \in \mathbb{R})$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$ (avec $v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$ (avec $u \geq 0$ sur I)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ lorsque $u > 0$

Exemple

On cherche à calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

On pose

$$u(x) = x \text{ et } v(x) = x^2 + 1$$

On a alors

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = 2x$$

car la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$ est la fonction $x \mapsto 2x$ (formule nx^{n-1} avec $n = 2$) et la dérivée de la fonction constante $x \mapsto 1$ est la fonction nulle.

La dérivée du quotient est donc :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1 \times (x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Remarque

- Si le dénominateur d'une fraction est constant, il est très maladroit d'utiliser la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Par exemple pour dériver $f(x) = \frac{x^2 + 1}{5}$ on écrira :

$$f(x) = \frac{1}{5} \times (x^2 + 1)$$

donc $f'(x) = \frac{1}{5} \times (2x)$ (formule $(ku)' = ku'$)

$$f'(x) = \frac{2x}{5}$$

- De même, si le numérateur d'une fraction est constant on utilisera, de préférence, la formule :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Par exemple, si $f(x) = \frac{5}{x^2 + 1}$

$$f(x) = 5 \times \frac{1}{x^2 + 1} \text{ donc :}$$

$$f'(x) = 5 \times \left(-\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}\right) = -\frac{10x}{(x^2 + 1)^2} \text{ (formule } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\text{avec } u(x) = x^2 + 1 \text{ donc } u'(x) = 2x$$

Démonstration : dérivée de la fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et soit $x_0 \neq 0$.

Pour $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \neq 0$, on calcule le taux de variation entre x_0 et $x_0 + h$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h}$$

On réduit le numérateur au même dénominateur :

$$\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + h)}{x_0(x_0 + h)} = \frac{-h}{x_0(x_0 + h)}$$

D'où :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{-h}{x_0(x_0 + h) \times h} = -\frac{1}{x_0(x_0 + h)}$$

Lorsque h tend vers 0, $x_0 + h$ tend vers x_0 donc $-\frac{1}{x_0(x_0 + h)}$ tend vers $-\frac{1}{x_0^2}$.

On en déduit :

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

Propriété

Cas de non-dérivabilité :

Une fonction peut être définie en un point sans y être dérivable. C'est le cas notamment :

- de la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 : sa courbe admet en l'origine une **tangente verticale**.
- de la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ en 0 : sa courbe présente en l'origine un **point anguleux** (deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents).

Exemple

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Pour $h > 0$, le taux de variation de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ entre 0 et h vaut :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Lorsque h tend vers 0 par valeurs positives, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$: la limite n'est pas un nombre réel, donc f n'est **pas dérivable** en 0.

Géométriquement, la pente des sécantes croît indéfiniment : la courbe admet à l'origine une tangente **verticale**.

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

$$\text{Pour } h > 0 : \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{Pour } h < 0 : \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

Le taux de variation tend vers 1 à droite et vers -1 à gauche : il n'existe pas de limite commune en 0, donc la fonction valeur absolue n'est **pas dérivable** en 0. La courbe présente à l'origine un **point anguleux**.

3. Fonction dérivée et sens de variations

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

Remarque

Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sur I , alors f est **strictement** croissante (resp. décroissante) sur I .

Mais la réciproque est fausse. Une fonction peut être strictement croissante sur I alors que sa dérivée s'annule sur I . C'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule pour $x = 0$

Exemple

Reprenons la fonction de l'exemple précédent.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

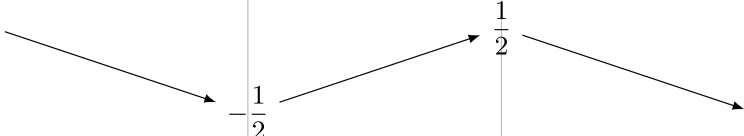
Le dénominateur de $f'(x)$ est toujours strictement positif.

Le numérateur de $f'(x)$ peut se factoriser : $1-x^2 = (1-x)(1+x)$

Une facile étude de signe montre que f' est strictement négative sur $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$ et est strictement positive sur $]-1; 1[$.

Par ailleurs, $f(-1) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$

On en déduit le tableau de variations de f (que l'on regroupe habituellement avec le tableau de signe de f') :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Les questions essentielles

1. Comment calculer un nombre dérivé à partir de la définition ?

On écrit le taux d'accroissement $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, on simplifie pour faire disparaître le h du dénominateur, puis on détermine sa limite lorsque h tend vers 0.

Voir la fiche méthode : [Calculer un nombre dérivé à l'aide de la définition](#)

2. Comment déterminer l'équation d'une tangente ?

On utilise la formule $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Il suffit de calculer $f(x_0)$, $f'(x)$ puis $f'(x_0)$ avant d'appliquer la formule.

Voir la fiche méthode : [Déterminer l'équation d'une tangente](#)

3. Comment dériver une fonction polynôme ?

On dérive chaque terme indépendamment en utilisant $(x^n)' = nx^{n-1}$, on conserve les coefficients multiplicatifs $(ku)' = ku'$, et on sait que la dérivée d'une constante est nulle.

Voir la fiche méthode : [Dériver une fonction polynôme](#)

4. Comment dériver un produit de fonctions ?

On applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$: on identifie u et v , on calcule séparément leurs dérivées, puis on assemble et on simplifie.

Voir la fiche méthode : [Dériver un produit de fonctions](#)

5. Comment dériver un quotient de fonctions ?

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, en prenant garde à l'ensemble de dérivabilité (v ne doit pas s'annuler).

Voir la fiche méthode : [Dériver un quotient de fonctions](#)

6. Comment étudier les variations d'une fonction ?

On calcule $f'(x)$, on étudie son signe, et on applique la règle :
 $f'(x) \geq 0$ sur un intervalle $\Leftrightarrow f$ est croissante. On dresse ensuite le tableau de variations avec les valeurs aux bornes et aux extrema.

Voir la fiche méthode : [Étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée](#)

7. Comment dériver une fonction de la forme $x \mapsto g(ax + b)$?

On dérive la fonction usuelle g , on remplace x par $ax + b$, puis on multiplie par le coefficient a : $(g(ax + b))' = a g'(ax + b)$.

Voir la fiche méthode : [Dériver une fonction de la forme \$x \mapsto g\(ax+b\)\$](#)

 Télécharger en PDF