

Probabilités conditionnelles – Indépendance

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Construire un arbre pondéré (probabilités conditionnelles)

Calculer une probabilité conditionnelle

Utiliser un tableau à double entrée (probabilités conditionnelles)

Appliquer la formule des probabilités totales

Démontrer (ou réfuter) l'indépendance de deux événements

1.Rappels

Rappels de définitions

- Une expérience **aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard.
- Chacun des résultats possibles s'appelle une **éventualité** (ou une **issue**).
- L'ensemble Ω de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
- On définit une **loi de probabilité** sur Ω en associant, à chaque éventualité x_i , un réel p_i compris entre 0 et 1 tel que la somme de tous les p_i soit égale à 1.
- Un événement est un sous-ensemble de Ω .

Exemple

Le lancer d'un dé à six faces est une expérience aléatoire d'univers comportant 6 **éventualités** : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

- L'ensemble $E_1 = \{2; 4; 6\}$ est un **événement**. En français, cet événement peut se traduire par la phrase : « *le résultat du dé est un nombre pair* »
- L'ensemble $E_2 = \{1; 2; 3\}$ est un autre événement. Ce second événement peut se traduire par la phrase : « *le résultat du dé est strictement inférieur à 4* ».

Définition

- l'événement contraire de A noté $\bar{A}$ est l'ensemble des éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A .
- l'événement $A \cup B$ (lire « A union B » ou « A ou B ») est constitué des éventualités qui appartiennent soit à A , soit à B , soit aux deux ensembles.
- l'événement $A \cap B$ (lire « A inter B » ou « A et B ») est constitué des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B .

Exemple

On reprend l'exemple précédent : $E_1 = \{2; 4; 6\}$ $E_2 = \{1; 2; 3\}$

- $\bar{E}_1 = \{1; 3; 5\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est un nombre impair »
- $E_1 \cup E_2 = \{1; 2; 3; 4; 6\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est pair **ou** strictement inférieur à 4 »
- $E_1 \cap E_2 = \{2\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est pair **et** strictement inférieur à 4 »

Définition

On dit que A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

Remarque

Deux événements contraires sont incompatibles mais deux événements peuvent être incompatibles sans être contraires.

Exemple

« Obtenir un chiffre inférieur à 2 » et « obtenir un chiffre supérieur à 4 » sont deux événements incompatibles.

Propriété

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(\Omega) = 1$
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Si A et B sont incompatibles, la dernière égalité devient :

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

2. Arbre

Lorsqu'une expérience aléatoire comporte plusieurs étapes, on utilise souvent un arbre pondéré pour la représenter.

Exemple

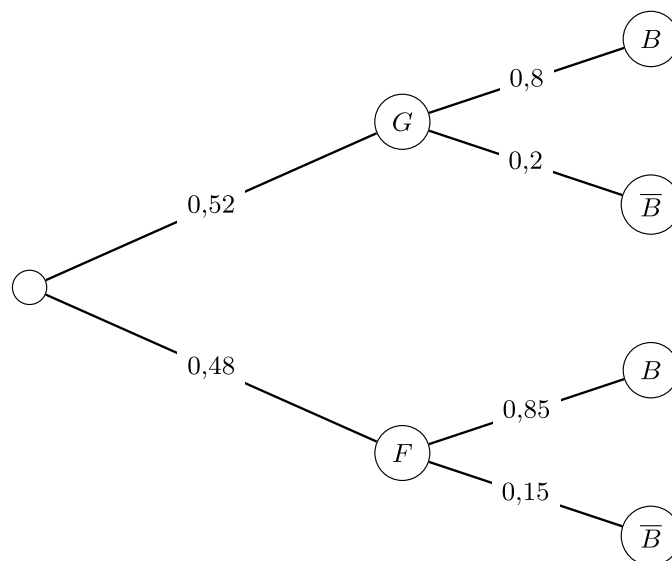
Dans une classe de Terminale, 52% de garçons et 48% de filles étaient candidats au baccalauréat.

80% des garçons et 85% des filles ont obtenu leur diplôme.

On choisit un élève au hasard et on note :

- G : l'événement « l'élève choisi est un garçon » ;
- F : l'événement « l'élève choisie est une fille » ;
- B : l'événement « l'élève choisi(e) a obtenu son baccalauréat ».

On peut représenter la situation à l'aide de l'arbre pondéré ci-dessous :



Le premier niveau indique le genre de l'élève (G ou F) et le second indique l'obtention du diplôme (B ou $\overline{B}$).

On inscrit les probabilités sur chacune des branches.

La **somme** des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est toujours égale à 1.

3. Probabilités conditionnelles

Définition

Soit A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$, la **probabilité de B sachant A** est le nombre :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

On peut aussi noter cette probabilité $p(B/A)$.

Exemple

On reprend l'exemple du lancer d'un dé. La probabilité d'obtenir un chiffre pair sachant que le chiffre obtenu est strictement inférieur à 4 est (en cas d'équiprobabilité) :

$$p_{E_2}(E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{1}{3}.$$

Propriété (formule des probabilités composées)

Pour tous événements A et B tels que $p(A) \neq 0$:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

Démonstration

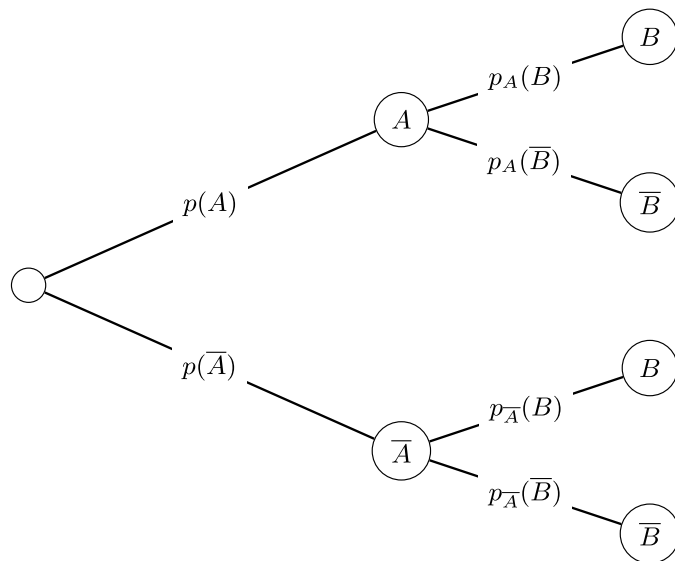
Par définition, $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

En multipliant les deux membres par $p(A)$, qui est non nul, on obtient :

$$p(A) \times p_A(B) = p(A \cap B)$$

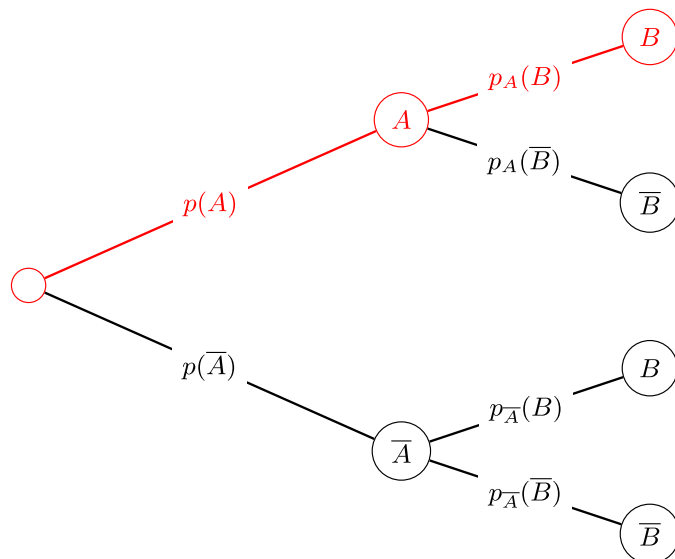
Remarques

- Cette formule sert essentiellement à calculer la probabilité de $A \cap B$ lorsque l'on connaît $p(A)$ et la probabilité conditionnelle $p_A(B)$.
- **Attention** à ne pas confondre $p_A(B)$ et $p(A \cap B)$ dans les exercices.
On doit calculer $p_A(B)$ lorsque l'on sait que A est réalisé.
- Avec un arbre pondéré, les probabilités conditionnelles figurent sur les branches du second niveau et des niveaux supérieurs (s'il y en a).
La probabilité inscrite sur la branche reliant A à B est $p_A(B)$.
Typiquement, un arbre binaire à deux niveaux se présentera ainsi :



- La formule $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ s'interprète alors de la façon suivante :

« La probabilité de l'événement $A \cap B$ s'obtient en faisant **le produit** des probabilités inscrites sur le chemin passant par A et B ».



4. Événements indépendants

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Propriété

A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p_A(B) = p(B).$$

Démonstration

D'après la formule des probabilités composées :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B).$$

Si A et B sont indépendants, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

En égalant les deux expressions et en simplifiant par $p(A) \neq 0$, on obtient $p_A(B) = p(B)$.

Réciproquement, si $p_A(B) = p(B)$, alors

$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(A) \times p(B)$, donc A et B sont indépendants.

Remarque

Comme $A \cap B = B \cap A$, A et B jouent des rôles symétriques. Ainsi, A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$.

Propriété (indépendance et événement contraire)

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Démonstration

Supposons A et B indépendants : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $\{A, \overline{A}\}$:

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$

On en déduit :

$$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A) \times p(B) = p(B) \times (1 - p(A)) = p(\overline{A}) \times p(B)$$

Donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Remarque

Par symétrie, A et $\overline{B}$ sont également indépendants, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

5. Formule des probabilités totales

Définition

$A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω si et seulement si
 $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

Cas particulier fréquent

Pour toute partie $A \subset \Omega$, A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω .

Propriété (Formule des probabilités totales)

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω , pour tout événement B , on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

Cette formule peut également s'écrire à l'aide de probabilités conditionnelles :

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

Cas particulier fréquent

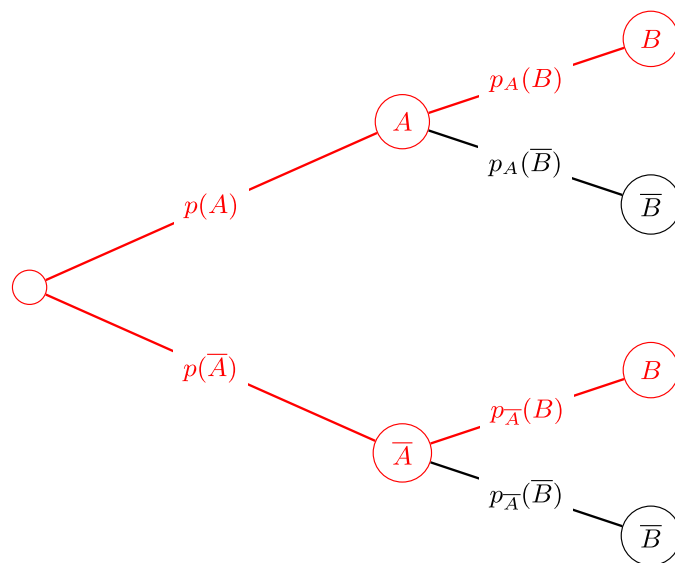
En utilisant la partition $\{A, \overline{A}\}$, quels que soient les événements A et B avec $p(A) \neq 0$ et $p(\overline{A}) \neq 0$:

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$$

Remarque

À l'aide d'un arbre pondéré, ce résultat s'interprète de la façon suivante :

« La probabilité de l'événement B est égale à la somme des probabilités des trajets menant à B ».



Les questions essentielles

1. Comment construire un arbre pondéré ?

On identifie les étapes successives de l'expérience, on trace une branche par événement à chaque niveau, et on inscrit sur chaque branche du second niveau une probabilité conditionnelle. La somme des probabilités issues d'un même nœud doit valoir 1.

Voir la fiche méthode : Construire un arbre pondéré (probabilités conditionnelles)

2. Comment calculer une probabilité conditionnelle ?

On applique la formule $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$, ou on lit directement la valeur sur la branche d'un arbre, ou on se restreint à la ligne/colonne pertinente d'un tableau à double entrée.

Voir la fiche méthode : Calculer une probabilité conditionnelle

3. Comment exploiter un tableau à double entrée ?

On lit les effectifs et le total N : $p(A)$ s'obtient en divisant le total de la ligne ou colonne par N , $p(A \cap B)$ par la case croisant A et

B , et $p_A(B)$ en se restreignant à la ligne (ou colonne) de A .

Voir la fiche méthode : [Utiliser un tableau à double entrée \(probabilités conditionnelles\)](#)

4. Comment appliquer la formule des probabilités totales ?

On identifie une partition $\{A_1, \dots, A_n\}$ de l'univers, puis on applique $p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$. Le cas le plus fréquent est la partition $\{A, \bar{A}\}$.

Voir la fiche méthode : [Appliquer la formule des probabilités totales](#)

5. Comment démontrer que deux événements sont indépendants ?

On compare $p(A \cap B)$ au produit $p(A) \times p(B)$: s'ils sont égaux, A et B sont indépendants. Sinon, ils ne le sont pas. On peut aussi vérifier $p_A(B) = p(B)$.

Voir la fiche méthode : [Démontrer \(ou réfuter\) l'indépendance de deux événements](#)

